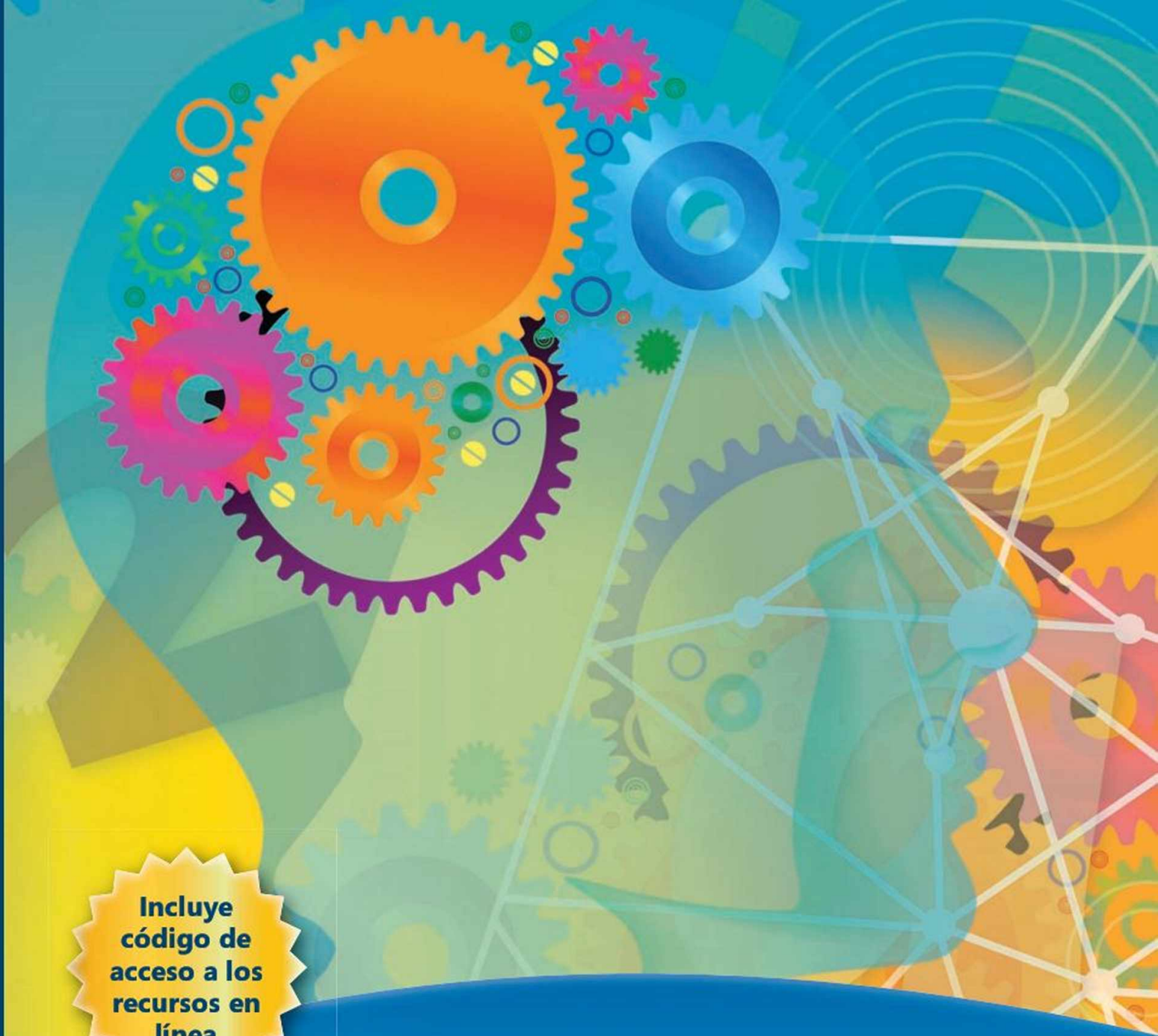


Incluye código de acceso a los recursos en línea

Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico

Tenoch E. Cedillo Ávalos
Valentín Cruz Oliva

ALWAYS LEARNING

PEARSON

www.FreeLibros.me

ACCESO A LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN LÍNEA

Para acceder a los recursos tecnológicos de este libro, visite el sitio Web:

http://www.pearsonenespañol.com/cedillo

(Utilice una moneda para descubrir el código de acceso. No use objetos filosos porque podría dañar el código).

IMPORTANTE:

Este código de acceso sólo puede usarse una vez y no es reemplazable.

Asegúrese de que no esté dañado o descubierto.

www.FreeLibros.me

Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico

Tenoch E. Cedillo Ávalos
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad Ajusco

Valentín Cruz Oliva
Administración Federal de
Servicios Educativos en el Distrito Federal
Coordinación Sectorial de Educación Secundaria

PEARSON

www.FreeLibros.me

Datos de catalogación bibliográfica

CEDILLO, TENOCH y CRUZ, VALENTÍN

Del sentido numérico al pensamiento prealgebraico

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-1414-8

Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 208

Todos los derechos reservados

Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editora: Gabriela López Ballesteros
e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán
Diseño de interiores y portada: By Color Soluciones Gráficas
Gerencia Editorial
Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

PRIMERA EDICIÓN, 2012

D.R. © 2012 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519
Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-1414-8
ISBN E-BOOK: 978-607-32-1415-5
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1416-2

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

www.FreeLibros.me

Contenido

Prólogo xi
Presentación xiii
Introducción xv
Referente teórico 1
Modelo didáctico 9
Investigación 17
Guía didáctica 31
Manual básico para el uso de un sistema algebraico computarizado (SAC) 55

Bloque 1

Operaciones y propiedades de los números naturales 65

Hoja de trabajo 1. Valor posicional 66
Hoja de trabajo 2. Lectura y escritura de números 67
Hoja de trabajo 3. Equivalencia numérica 68
Hoja de trabajo 4. ¡Se descompuso la tecla para sumar! 69
Hoja de trabajo 5. ¡Se descompuso la tecla para restar! 70
Hoja de trabajo 6. Del cero al cien con sólo cuatro "cuatros" 71
Hoja de trabajo 7. ¡Al cero en cinco pasos! 72
Hoja de trabajo 8. ¿Cuáles números dividen a otros? 73
Hoja de trabajo 9. ¿Qué números se dividen entre 7 y 11? 74
Hoja de trabajo 10. ¿Esos "numerotes" son divisibles entre todo eso? 75
Actividades sugeridas para el futuro docente 76

www.FreeLibros.me

Bloque 2

Números decimales: sus operaciones y propiedades **77**

Hoja de trabajo 11. Suma y estimación 78
Hoja de trabajo 12. Resta y estimación 79
Hoja de trabajo 13. Multiplicación y estimación 80
Hoja de trabajo 14. ¡Se descompuso la tecla para multiplicar! 81
Hoja de trabajo 15. División y estimación 82
Hoja de trabajo 16. ¡Se descompuso la tecla para dividir! 83
Hoja de trabajo 17. Lectura y escritura de números decimales 84
Hoja de trabajo 18. Lectura y escritura de medidas de longitud 85
Hoja de trabajo 19. Lectura y escritura de medidas de peso 86
Hoja de trabajo 20. Transformaciones en un solo paso 87
Hoja de trabajo 21. ¡Se descompuso la tecla del punto decimal! 88
Hoja de trabajo 22. Fracciones decimales 89
Actividades sugeridas para el futuro docente 90

Bloque 3

Fracciones comunes **91**

Hoja de trabajo 23. Noción de fracción 92
Hoja de trabajo 24. Fracciones equivalentes 93
Hoja de trabajo 25. Fracciones y razones 94
Hoja de trabajo 26. Fracciones como operadores 95
Hoja de trabajo 27. ¿Cuáles fracciones faltan? 96
Hoja de trabajo 28. ¿Cómo encuentro esas fracciones? 97
Hoja de trabajo 29. Un poco de fracciones y restas 98
Hoja de trabajo 30. ¡Qué fácil es multiplicar con fracciones! 99
Hoja de trabajo 31. ¿Cuál fracción es mayor? 100
Hoja de trabajo 32. ¿Qué fracciones dan la suma mayor? 101
Actividades sugeridas para el futuro docente 102

www.FreeLibros.me

Bloque 4

Números con signo y sus operaciones **103**

Hoja de trabajo 33. ¿Cómo sumamos números con signo? 104
Hoja de trabajo 34. Algo más sobre suma de números con signo 105
Hoja de trabajo 35. ¿Cómo restamos números con signo? 106
Hoja de trabajo 36. ¿Cómo multiplico números con signo? 107
Hoja de trabajo 37. Algo más sobre la multiplicación de números con signo 108
Hoja de trabajo 38. ¿Cómo divido números con signo? 109
Hoja de trabajo 39. Potencias de números con signo 110
Hoja de trabajo 40. Algunas aplicaciones de los números con signo 111
Actividades sugeridas para el futuro docente 112

Bloque 5

El concepto de aproximación en el contexto de la potenciación y radicación **113**

Hoja de trabajo 41. Exponentes fraccionarios 114
Hoja de trabajo 42. Exponentes negativos 115
Hoja de trabajo 43. ¡Se descompuso la tecla de raíz cuadrada! 116
Hoja de trabajo 44. Aproximación "por abajo" y "por arriba" 117
Actividades sugeridas para el futuro docente 118

Bloque 6

Métodos no convencionales para resolver ecuaciones **119**

Hoja de trabajo 45. ¿Incógnitas?, ¿ecuaciones?... ¿Qué es eso? 120
Hoja de trabajo 46. Números perdidos 121

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 47. Ecuaciones que tienen más de una solución 122
Hoja de trabajo 48. Ecuaciones distintas que tienen la misma solución 123
Hoja de trabajo 49. Ecuaciones equivalentes 124
Hoja de trabajo 50. Tanteo y refinamiento 125
Hoja de trabajo 51. Simplificación de ecuaciones 126
Hoja de trabajo 52. Deshaciendo operaciones 127
Hoja de trabajo 53. Resolver ecuaciones no es tan difícil 128
Actividades sugeridas para el futuro docente 129

Bloque 7

Exponentes y simbolización **131**

Hoja de trabajo 54. Potencias y simbolización (1) 132
Hoja de trabajo 55. Potencias y simbolización (2) 133
Hoja de trabajo 56. Potencias y simbolización (3) 134
Hoja de trabajo 57. Potencias y simbolización (4) 135
Hoja de trabajo 58. ¿Qué significa "elevar a la menos 1"? 136
Hoja de trabajo 59. Leyes de los exponentes (1) 137
Hoja de trabajo 60. Leyes de los exponentes (2) 138
Hoja de trabajo 61. ¿Una potencia que siempre da por resultado 1? 139
Hoja de trabajo 62. Simbolización: números consecutivos 140
Hoja de trabajo 63. Términos semejantes (1) 141
Hoja de trabajo 64. Términos semejantes (2) 142
Hoja de trabajo 65. Términos semejantes (3) 143
Hoja de trabajo 66. Términos semejantes (4) 144
Hoja de trabajo 67. Equivalencia algebraica 145
Hoja de trabajo 68. Simbolización algebraica y resolución de problemas 146
Hoja de trabajo 69. ¡Esto sí está difícil! 147
Actividades sugeridas para el futuro docente 148

www.FreeLibros.me

Bloque 8

Introducción a la representación gráfica de funciones **149**

Hoja de trabajo 70. Patrones numéricos y gráficas 150
Hoja de trabajo 71. Patrones numéricos y coordenadas cartesianas 151
Hoja de trabajo 72. Ecuaciones lineales y sus gráficas 152
Hoja de trabajo 73. Inclinación de una recta en el plano cartesiano 153
Hoja de trabajo 74. Ubicación de la recta en el plano cartesiano 154
Hoja de trabajo 75. Noción de crecimiento en una recta en el plano 155
Hoja de trabajo 76. Rectas y cuadrantes del plano cartesiano 156
Hoja de trabajo 77. Puntos relevantes en la gráfica de una ecuación lineal (1) 157
Hoja de trabajo 78. Puntos relevantes en la gráfica de una ecuación lineal (2) 158
Hoja de trabajo 79. Iniciación a la lectura de gráficas de funciones lineales 159
Hoja de trabajo 80. Ecuaciones lineales y coordenadas en el plano 160
Hoja de trabajo 81. Los puntos de la gráfica de una ecuación lineal (1) 161
Hoja de trabajo 82. Rectas paralelas en el plano cartesiano 162
Hoja de trabajo 83. Rectas horizontales (1) 163
Hoja de trabajo 84. Rectas horizontales (2) 164
Actividades sugeridas para el futuro docente 165

Bloque 9

Introducción a la representación gráfica de funciones cuadráticas **167**

Hoja de trabajo 85. Dos puntos determinan una recta 168
Hoja de trabajo 86. ¿Cuáles puntos están en una recta? 169
Hoja de trabajo 87. Otro tipo de ecuaciones 170
Hoja de trabajo 88. Otro tipo de gráficas 171
Hoja de trabajo 89. De rectas a sus ecuaciones 172

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 90. De parábolas a sus ecuaciones 173
Hoja de trabajo 91. Puntos y ecuaciones (1) 174
Hoja de trabajo 92. Puntos y ecuaciones (2) 175
Hoja de trabajo 93. ¿Entre dos puntos hay otro punto? 176
Hoja de trabajo 94. Vértice de la parábola (1) 177
Hoja de trabajo 95. Vértice de la parábola (2) 178
Hoja de trabajo 96. Parábolas y traslaciones en el plano 179
Hoja de trabajo 97. ¿Qué modifica estas parábolas? 180
Hoja de trabajo 98. Reflexión de una parábola 181
Actividades sugeridas para el futuro docente 182

Bloque 10

Puntos en el plano cartesiano **183**
Hoja de trabajo 99. Puntos en el plano 184
Hoja de trabajo 100. Dibujando con puntos 185
Hoja de trabajo 101. Movimientos rígidos y puntos en el plano 186
Hoja de trabajo 102. Traslaciones y simetrías con gráficas 187
Hoja de trabajo 103. ¿Unos estudiantes hicieron esos dibujos? 188
Actividades sugeridas para el futuro docente 189

www.FreeLibros.me

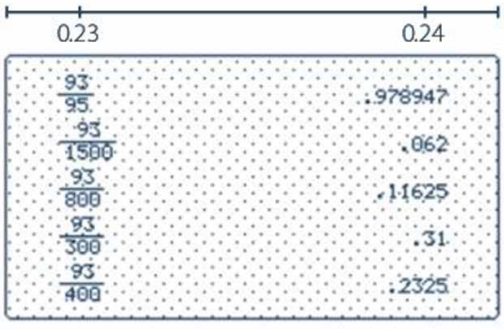
Prólogo

El uso reflexivo de la tecnología en el aula de matemáticas requiere un gran trabajo de investigación que permita detectar su eficiencia en la construcción del conocimiento. Este tipo de trabajo podrá conciliar las posturas extremas en que ha caído una gran cantidad de profesores de matemáticas. Por una parte están los que consideran que la tecnología es la panacea que resolverá una gran cantidad de problemas del aprendizaje de los alumnos; por la otra, están los profesores que consideran que la tecnología es la causante de la pérdida de habilidades matemáticas.

El desarrollo tecnológico acecha de manera constante al sistema educativo, a cuyos integrantes, autoridades educativas y profesores de matemáticas, les es difícil decidir qué opción tecnológica es más adecuada. El profesor de matemáticas está prácticamente cercado por el desarrollo tecnológico, sin que la comunidad académica le proporcione los medios para aprovechar en el salón de clase la tecnología más conveniente de acuerdo con sus características personales, cantidad de alumnos y posibilidades económicas de la institución, entre otras.

Algunos investigadores en educación matemática consideran que la creencia de que el uso de una calculadora inhibe el desarrollo de destrezas aritméticas tiene fundamento en el uso inadecuado de ese medio tecnológico. Investigadores de la comunidad internacional han demostrado, a través de sus proyectos, que tales pérdidas de habilidad se deben al uso restringido de la calculadora y a tareas exclusivamente de corte rutinario. Esa creencia desaparece cuando al profesor se le introduce en el uso de la tecnología en un contexto más rico que implica su uso en tareas no rutinarias, donde esa tecnología es un medio para el desarrollo de habilidades matemáticas más complejas que propician la construcción de un conocimiento más sólido.

Para ejemplificar lo mencionado, a continuación se presenta una actividad diseñada con el propósito de provocar en el alumno una mayor reflexión sobre los números decimales y su orden en la recta real, a sabiendas de que en la construcción del concepto de número decimal hay una gran problemática. Investigadores en educación matemática han demostrado la enorme dificultad que presenta para los alumnos encontrar un número decimal entre 0.23 y 0.24. Supongamos que, utilizando la calculadora, y con un número dado, digamos 93, se debe encontrar otro número de forma que al dividir el 93 entre el número propuesto se obtenga como resultado un número que esté entre 0.23 y 0.24, como se presenta en la figura.



www.FreeLibros.me

400 es uno de tantos números que responde al problema planteado (de hecho, hay infinidad). En un nivel de dificultad más exigente se puede pedir encontrar un rango; por ejemplo, todos los números entre 388 y 404 cumplen con lo solicitado. Este tipo de actividad parece más factible si se cuenta con el apoyo de una calculadora.

En este libro, el autor, a través de las reflexiones y actividades que presenta en contextos de uso de calculadoras, aborda una problemática compleja que es el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, el cual es de los más difíciles que tienen que dar los estudiantes para poder resolver problemas desde un punto de vista más general y abstracto. El paso de la aritmética al álgebra constituye una ruptura epistemológica. Gerard Vergnaud señala al respecto: *"En tanto que la resolución aritmética de un problema en lengua natural consiste en buscar las incógnitas intermediarias en un orden conveniente, y en escoger los datos y las operaciones adecuados para calcular esas incógnitas, el álgebra consiste en determinar relaciones explícitas entre incógnitas y datos, y de sumergirse enseguida en procedimientos de tratamientos relativamente automáticos para encontrar la solución".*

El autor encamina sus reflexiones hacia un puente que relacione productos de investigación con respecto a la construcción de conceptos a través del uso de calculadoras y su puesta en práctica en el aula de matemáticas. El investigador es consciente de la problemática entre el paso de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico e implementa actividades que permitan el desarrollo de habilidades algebraicas apoyándose en el trabajo teórico de Jerome Bruner.

Como se señala antes, el investigador y profesor de matemáticas necesita una infraestructura de apoyo que le permita tener mejores acercamientos a la problemática en que está inmerso. Este libro está encaminado a proporcionar ese apoyo tanto al investigador en educación matemática como al profesor de matemáticas. Estamos en una era que cuenta con una tecnología muy avanzada y sofisticada; por ello, es imprescindible la investigación y producción de materiales que estén dirigidos al uso reflexivo de la tecnología; este libro forma parte de esa corriente para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en un ambiente tecnológico que privilegia las calculadoras.

Fernando Hitt
Profesor titular
Universidad de Québec, Montréal
Québec, Canadá

www.FreeLibros.me

Presentación

La calculadora en el aula

Esta serie tiene como propósito poner a disposición de investigadores y profesores materiales y técnicas de enseñanza para el uso de la calculadora en el aula; estas técnicas han derivado de la investigación realizada por el autor en los últimos quince años. Actualmente la calculadora es una herramienta muy utilizada por los profesores de matemáticas, y en los últimos años se ha observado que cada vez más profesores e investigadores mexicanos están desarrollando propuestas para el uso de esta herramienta, situación que se ha hecho palpable en los distintos foros sobre la enseñanza de las matemáticas que se llevan a cabo en México. Estas iniciativas son indicadores claros de un creciente interés por conocer y explotar los nuevos recursos tecnológicos como un medio para apoyar el aprendizaje y la enseñanza.

Existen diversas revistas de enseñanza y de investigación que incluyen actividades para el uso de la calculadora en las clases de matemáticas a nivel básico. Pero tienen la limitante de que, a pesar de que estas iniciativas presentan actividades e ideas interesantes, sólo proporcionan una muestra, la cual no es suficiente para delinear una propuesta didáctica en la que el profesor se pueda apoyar para abordar el currículum oficial.

Recientemente se han editado valiosos materiales sobre el uso de la calculadora; sin embargo, la mayoría están dirigidos a profesores de los niveles medio superior y superior, y en particular a profesores y estudiantes que cursan carreras de ingeniería. Los materiales para la Educación Básica y Educación Normal aún son escasos. La propuesta de la primera etapa de esta serie editorial es llenar ese vacío.

La calculadora en el aula representa un esfuerzo para propiciar la construcción de una cultura didáctica en el uso de nuevos recursos tecnológicos. Esta tarea requiere la participación de muchos educadores que coadyuven en la búsqueda de alternativas acordes al estilo y tradiciones de enseñanza de las escuelas formadoras de docentes, y a las exigencias educativas que deben atender los profesores de educación básica en servicio. En consecuencia, una condición que se ha impuesto a los materiales de esta serie es que sean el producto de cuidadosas revisiones a partir de resultados de investigación obtenidos en el aula.

Reiteramos nuestra convicción de que serán los profesores en servicio quienes tendrán la última palabra en cuanto a la pertinencia y utilidad de esta serie, por lo que sus comentarios y críticas siempre serán bienvenidos.

Tenoch E. Cedillo A.
Valentín Cruz Oliva
Autores

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

Introducción

El propósito de este libro es poner a disposición de profesores e investigadores un material que presenta un modelo didáctico para el uso de la calculadora en la clase de matemáticas, así como los principios teóricos en que se sustenta y los resultados de investigación obtenidos al aplicar este modelo. El presente volumen es el resultado de un trabajo que se ha conformado luego de seis años de estudio con cerca de 20 000 estudiantes y 800 profesores de distintas regiones del país.

Aquí se han incorporado las observaciones que con más frecuencia han expresado los profesores después de utilizar estos materiales, entre las cuales destaca la inclusión de una guía didáctica para la aplicación de las actividades en el aula. Asimismo, cuenta con actividades que conducen a los estudiantes por un recorrido cuyo punto de partida es una exploración intuitiva de las propiedades del sistema numérico decimal, las posibilidades que nos brindan los números para componerlos y descomponerlos como herramientas para resolver problemas específicos, la propiedad de densidad de los números racionales en el ámbito del desarrollo de habilidades de estimación y aproximación, y el estudio de la jerarquía de las operaciones aritméticas como un antecedente para preparar la entrada al álgebra.

Las cualidades de los números y las propiedades de sus operaciones sirven de vehículo para que los estudiantes asignen significados a los componentes de las expresiones algebraicas. Entre las actividades que abordan estas cuestiones en el presente volumen destacan el acercamiento a métodos no convencionales para la resolución de ecuaciones, y una introducción a la noción de función, cuya finalidad es propiciar el desarrollo de habilidades para leer y crear expresiones algebraicas de modo que el estudiante produzca e interprete gráficas de funciones lineales y cuadráticas en el plano cartesiano.

En resumen, en este volumen se explotan las ventajas que ofrece un sistema algebraico computarizado o una calculadora científica para articular un acercamiento intuitivo a las cualidades de los números naturales, los decimales, las fracciones comunes y los números con signo, como una introducción a los temas prealgeabraicos, la cual culmina con el manejo de las tres formas de representación de una función: algebraica, tabular y gráfica.

El presente volumen contiene las siguientes secciones:

- Referente teórico.
- Modelo didáctico.
- Resultados de investigación.
- Guía didáctica.
- Actividades para la enseñanza.
- Manual básico para el uso de la calculadora.

El Referente teórico está dirigido a profesores e investigadores interesados en los principios que han orientado la investigación en que se sustenta el modelo didáctico que se propone en este libro.

www.FreeLibros.me

El Modelo didáctico parte del reconocimiento explícito de las diferencias entre el lenguaje natural y el código algebraico. La calculadora, adecuadamente empleada, puede simular un microcosmos en el que el lenguaje que "se habla" es el lenguaje de las matemáticas; más concretamente, los códigos de la aritmética, el álgebra y la geometría.

La sección Resultados de investigación incluye episodios selectos de la investigación que los autores han realizado sobre el potencial del uso de sistemas algebraicos computarizados instalados en calculadoras gráficas. Esta sección está dirigida a profesores e investigadores interesados en conocer los efectos del uso de ese tipo de calculadoras en el aprendizaje de estudiantes que se encuentran en el proceso de transición de la aritmética al álgebra.

La Guía didáctica contiene recomendaciones específicas para la aplicación de cada una de las actividades que conforman el material destinado a la enseñanza. Se espera que esta sección sea de utilidad para que el profesor anticipe de manera más ágil cuáles son los temas y conceptos matemáticos que implícitamente contienen cada una de las actividades de aprendizaje propuestas, el tiempo que se sugiere para el tratamiento de cada actividad, y las situaciones que pueden surgir durante su aplicación. En esta sección también se presentan sugerencias para incluir actividades diseñadas con base en el uso de la calculadora en el tra tamiento del currículum actual.

La sección Actividades para la enseñanza está dirigida a investigadores y profesores. Se pretende que los investigadores encuentren en esta sección un material que les pueda ser útil para la toma de datos de sus propias indagaciones o de sus estudiantes, y una colección de actividades que muestran cómo se concretó una propuesta didáctica que relaciona la teoría con la práctica. Esta sección pone a disposición de los profesores un conjunto de actividades articuladas que les permitirá llevar a la práctica un enfoque alternativo para introducir el estudio del álgebra escolar a partir de los antecedentes aritméticos que sus estudiantes recibieron durante la educación básica. Las observaciones obtenidas en una amplia población nos inducen a esperar que los estudiantes encontrarán en este material actividades que estimularán su curiosidad intelectual para luego estar en posibilidades de confrontar complejas situaciones matemáticas a partir de sus propias formas de razonar, sin tener que recordar a cada paso procedimientos o definiciones ya alguna vez aprendidos.

Esta sección contiene 104 hojas de trabajo, distribuidas en 10 bloques, en las cuales se presentan actividades específicamente diseñadas para introducir el estudio de los siguientes temas algebraicos:

Bloque 1	Operaciones y propiedades de los números naturales
Bloque 2	Números decimales: sus operaciones y propiedades
Bloque 3	Fracciones comunes
Bloque 4	Números con signo y sus operaciones
Bloque 5	El concepto de aproximación en el contexto de la potenciación y radicación

www.FreeLibros.me

Bloque 6	Métodos no convencionales para resolver ecuaciones
Bloque 7	Exponentes y simbolización
Bloque 8	Introducción a la representación gráfica de funciones
Bloque 9	Introducción a la representación gráfica de funciones cuadráticas
Bloque 10	Puntos en el plano cartesiano

Por último, el Manual básico presenta una guía mínima para iniciarse en el uso de la calculadora algebraica (sistema algebraico computarizado), en el que se abordan las funciones que se utilizan con mayor frecuencia para realizar las actividades contenidas en este volumen.

Este libro cuenta con recursos tecnológicos desarrollados por Texas Instruments, Inc. Por favor, diríjase a la página de este libro en:

www.pearsonenespañol.com/cedillo

y siga las instrucciones para obtener el código de acceso para poder utilizarlos.

www.FreeLibros.me

Créditos

Sobre los documentos de las actividades:
Todos los documentos con la extensión .tns que acompañan a las actividades de este libro y que se encuentran en la página Web ***www.pearsonenespañol.com/cedillo***, han sido desarrollados por Texas Instruments, Inc. y son propiedad de esta empresa. Texas Instruments, Inc. ha otorgado a Pearson México permiso para utilizarlas y publicarlas en la página mencionada. Texas Instruments otorga a los maestros que usen este libro como texto en un curso, permiso para utilizarlas y editarlas para sus clases, siempre y cuando se reconozca el derecho de autor original a esta empresa.

Sobre el software:
Los documentos con la extensión .tns que se encuentran en la página Web ***www.pearsonenespañol.com/cedillo*** de este libro utilizan la tecnología TI-Nspire™ desarrollada por Texas Instruments, Inc. El software TI-Nspire™ para Profesores permite a los maestros demostrar conexiones que estimulan la comprensión de las matemáticas y de las ciencias en los estudiantes. El Software TI-Nspire™ para Profesores es igual al software existente en las calculadoras TI-Nspire™ y permite trabajar con el Sistema Algebraico Computacional (CAS) o con cálculos numéricos estándar. También permite realizar demostraciones interactivas y la exploración matemática de imágenes de la vida real.

Esta tecnología y su software son compatibles con tablones interactivos y con proyectores digitales.

Texas Instruments permitirá la descarga opcional de una versión de prueba por tres meses del software TI-Nspire™ para Profesores a los usuarios de este libro. Para descargar la versión de prueba del software TI-Nspire™ para Profesores, favor de dirigirse a: ***education.ti.com/lar/pearson.***

Nota: usted podrá correr todas las actividades en el TI-Nspire™ Document Player sin necesidad de poseer o instalar el software TI-Nspire™ para Profesores.

El TI-Nspire™ Document Player se encuentra en la siguiente dirección: ***http://education.ti.com/LAR/document-player/***

*TI-Nspire soporta imágenes de los siguientes tipos: jpg, jpeg, bmp, png.

www.FreeLibros.me

Referente teórico

La investigación sobre calculadoras se ha enfocado principalmente en el estudio de las facilidades que esa herramienta ofrece para producir gráficas (Cuoco, 1995; diSessa, 1995; Hector, 1992; Ruthven, 1990, 1992, 1995, 1996). El material que se presenta en este libro se avoca a otros aspectos del papel que puede desempeñar la calculadora en el aula para favorecer el desarrollo de habilidades algebraicas; en particular, las referentes a la asignación de significados para las literales y sus aplicaciones en el uso de las expresiones algebraicas, las cuales juegan un papel determinante en el desarrollo del pensamiento algebraico.

A diferencia del referente teórico en que se sustenta el tratamiento didáctico que se hace en los primeros años de la educación básica para dotar de significado a los números, y que ha conducido a acudir al contexto del entorno de la vida cotidiana del estudiante, en el presente volumen se hace énfasis en los elementos teóricos relacionados con la necesidad de fortalecer los significados de los números en los niños a través del trabajo con los números en contextos puramente numéricos; por ejemplo, en actividades que los conduzcan a responder preguntas como: ¿hay números que tienen exactamente tres divisores?, ¿qué características tienen esos números?, ¿puedes generar un método para construir números que tengan exactamente cuatro divisores?, ¿puedes encontrar un método que te permita construir números que tengan exactamente *n* divisores? Estas interrogantes se abordan más adelante con mayor detalle.

Un rol plausible para los sistemas algebraicos computarizados

Al trabajar en la página de inicio de una calculadora algebraica, el estudiante puede asignar un valor numérico a una literal; definir, en términos de esa variable, una expresión algebraica, y ordenar a la calculadora que calcule el valor numérico de dicha expresión (figura 1).

www.FreeLibros.me

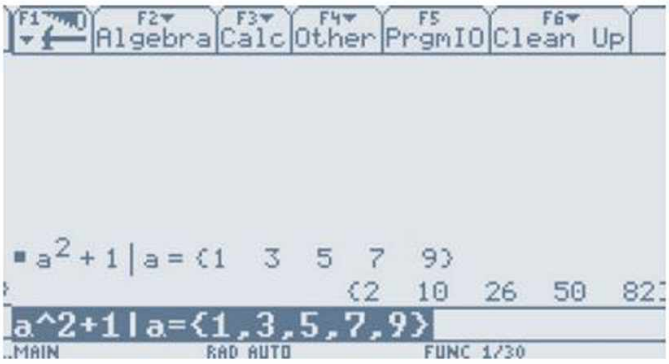


Figura 1

Ese recurso permite que el usuario trabaje con las expresiones algebraicas como objetos activos, en el sentido de que no solamente es capaz de expresar algebraicamente el enunciado de un problema, sino también de hacer algo con esas expresiones y obtener retroalimentación inmediata de la máquina. Este recurso hace surgir consideraciones didácticas como las que se presentan a continuación (Cedillo, 2001).

Si leemos la pantalla de izquierda a derecha encontramos la regla de correspondencia de la función $a2 + 1$, después su dominio y contradominio. Si la leemos de derecha a izquierda observamos un patrón numérico y la regla algebraica que lo gobierna. En términos didácticos hay una notable diferencia según la dirección en que se lee la pantalla. Si leemos de izquierda a derecha empezamos con definiciones y reglas sintácticas que nos conducen a una función algebraica que puede usarse para producir un conjunto de valores numéricos. Si leemos de derecha a izquierda, empezamos con un patrón numérico mediante el cual, por simple inspección visual, podemos encontrar la regla algebraica que lo produce. Más aún, de izquierda a derecha empezamos por leer el contradominio de la función y luego su dominio.

Esas ideas se ubican en el núcleo del acercamiento didáctico que se presenta en este libro; este enfoque sugiere una aproximación al código algebraico como lenguaje en uso y conforma en gran medida el referente teórico en el que se sustenta esta secuencia didáctica que proponemos para introducir el estudio del álgebra escolar.

Antecedentes

El sustento teórico del modelo didáctico que se presenta en este libro se conformó a través de una constante interacción entre teoría y práctica. Este proceso se originó en un estudio exploratorio sobre el potencial de la calculadora programable como herramienta cognoscitiva; el estudio se llevó a cabo con estudiantes de 11 a 12 años de edad que no habían recibido instrucción en álgebra (Cedillo, 1994), y el trabajo de campo tuvo una duración de diez sesiones de 50 minutos. Las actividades con que se experimentó en el aula se basaban en pedir a los estudiantes que identificaran las reglas que gobiernan ciertos patrones numéricos. Una vez que lo lograban, se les pedía que construyeran un programa en la calculadora que reprodujera esos patrones. En términos matemáticos, estas actividades requieren que los estudiantes expresen mediante una función lineal la forma en que ellos describen verbalmente las reglas que generan un patrón numérico. Por ejemplo, la regla que genera los datos de la figura 2 puede expresarse mediante la función $y = 2x - 1$.

www.FreeLibros.me

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
4	7
6	11
9	17

Figura 2

Como se esperaba, la primera reacción de los estudiantes para enfrentar esas actividades fue expresar verbalmente la regla que genera una tabla como la anterior; por ejemplo: "multiplicar por 2 y restar 1", o "sumar el número consigo mismo y restar uno". Una vez que introducían en la calculadora una función lineal que consideraban que representaba esa regla, asignaban valores numéricos a la variable para así verificar la validez de sus respuestas (vea, por ejemplo, las actividades del bloque 1). Debe mencionarse que en este estudio no se incluyó instrucción alguna acerca de nomenclatura o conceptos algebraicos; para los estudiantes, esas expresiones algebraicas sólo eran programas que permitían que la calculadora "entendiera" lo que ellos querían hacer.

La posibilidad de editar expresiones algebraicas que brinda la calculadora va más allá de sólo escribirlas, como se hace en el ambiente del lápiz y el papel o en un pizarrón electrónico. El recurso relevante de esas máquinas es que hacen posible *usar* las expresiones algebraicas; por ejemplo, obtener su valor numérico para un valor específico de la variable, o construir tablas y gráficas para exploraciones subsecuentes. Esto, además, proporciona una retroalimentación inmediata al usuario.

Los resultados de ese estudio sugirieron que los recursos que ofrece la calculadora programable permiten que los estudiantes aborden las actividades creando estrategias no convencionales que se generan al seguir sus propias formas de razonamiento (Cedillo, 1994). Las respuestas de los estudiantes mostraron que el uso de la calculadora favoreció que formularan conjeturas y las evaluaran por sí mismos, lo cual les estimuló a aventurarse siguiendo estrategias propias, sin necesidad de acudir constantemente al profesor para solicitar su aprobación o para recordar procedimientos convencionales previamente aprendidos. En vez de hacer ese tipo de preguntas, las participaciones de los estudiantes se concentraron en proponer soluciones cuyas formas de validación se discutían con el profesor. Esto, en principio, brindaba al profesor la posibilidad de conducir a sus estudiantes hacia un nivel más alto de aprendizaje. Por ejemplo, el simple hecho de que en general cada estudiante eligiera una literal distinta para editar sus programas, como $p+4$ y $b+4$; o cuando uno de ellos construía el programa $a+a-1$, y otro estudiante optara por el programa $2 \times b-1$, daba lugar a interesantes debates en el grupo sobre cuestiones relacionadas con la equivalencia algebraica.

El ambiente de trabajo que se generó durante ese estudio podría describirse como un escenario en el que, en esencia, a través de la exploración numérica orientada a la consecución de un fin claramente establecido los estudiantes iban asignando significados al código algebraico a partir de las formas en que lo usaban, sin requerir previamente del conocimiento de definiciones y reglas de transformación algebraica. Esta forma de trabajo indicó que los estudiantes estaban aprendiendo a emplear el código algebraico a partir de su uso, lo cual condujo a la búsqueda de elementos teóricos que permitieran explicar y analizar lo que ahí se había observado.

www.FreeLibros.me

Un ejemplo relevante del *aprendizaje a través del uso* lo proporciona la forma en que adquirimos los elementos básicos del lenguaje natural: la lengua materna se aprende fundamentalmente a través de su uso, sin necesidad de conocer previamente aspectos gramaticales o reglas sintácticas. Las similitudes que se presentaron en ese estudio exploratorio entre el aprendizaje del álgebra y del lenguaje natural, condujeron a la idea de proponer la enseñanza del álgebra como un código cuya función es comunicar ideas matemáticas. Bajo perspectivas distintas, esta postura ha sido abordada anteriormente por Papert (1980) y Mason (1984). La forma en que avanzamos en el desarrollo de estas ideas se expone en la siguiente sección.

Principios teóricos

El estudio que sucintamente se describió en la sección anterior dio lugar a cuestionar un principio teórico que subyace en un enfoque de enseñanza ampliamente empleado en matemáticas:

Los significados determinan los distintos usos del lenguaje

Muchos libros de texto ejemplifican este principio. La lección inicia con definiciones, ejemplos y reglas sintácticas (*significados*); después, el capítulo cierra con una serie de problemas que requieren la aplicación de las definiciones, reglas y ejemplos que les antecedieron (*usos*). Indudablemente, este enfoque teórico funciona; de esa manera han aprendido muchas generaciones. Pero también sabemos que para una gran mayoría de los estudiantes las matemáticas han resultado algo muy difícil de comprender, y en muchos casos es un obstáculo insuperable (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Lee y Wheeler, 1988). Los resultados poco satisfactorios que se han obtenido aplicando ese método hacen plausible la búsqueda de alternativas, como la que se expone a continuación.

La contraparte de ese principio teórico se ajusta en buena medida a lo observado en el estudio exploratorio anteriormente expuesto, el cual puede resumirse como sigue.

Los usos del lenguaje determinan sus significados

La postura teórica que conlleva ese principio concuerda con el trabajo desarrollado por Bruner (1980, 1982, 1983, 1985), quien realizó una extensa investigación sobre la adquisición del lenguaje materno. Su estudio se centró en indagar cómo es que los niños, aparentemente sin esfuerzo, aprenden algo tan complejo como el lenguaje natural. Una parte central de su trabajo se condujo a estudiar qué es lo que hace posible que el lenguaje natural sea aprendido por cualquier persona con una inteligencia normal, mientras que, en general, otros campos de conocimiento presentan una situación bastante distinta a este respecto. ¿Por qué no todos aprendemos matemáticas, filosofía, geografía o historia, y sí aprendemos con un aceptable nivel de dominio el lenguaje natural?

La investigación de Bruner cuestiona sensiblemente posiciones teóricas planteadas con anterioridad. Entre éstas deben destacarse las propuestas por Piaget y Chomsky.

Piaget (1985, 1988), planteado sucintamente, propone que el desarrollo del lenguaje es un subproducto del desarrollo de operaciones cognoscitivas no lingüísticas. Bajo esta perspectiva, el lenguaje es simplemente un síntoma de la semiotización automá-

www.FreeLibros.me

tica de las operaciones cognoscitivas del desarrollo. Esta posición teórica presenta el problema de que no especifica a través de qué medios concretos dichas operaciones cognoscitivas no lingüísticas propician la capacidad para reconocer y emplear la gramática de predicados, o el sistema de marcadores lingüísticos definido-indefinido de la anáfora, o la capacidad para generar únicamente frases bien formadas, confiando así, con una fe ciega, en la inevitabilidad del progreso. Un ejemplo claro de la inconsistencia de esta posición es que no ofrece una respuesta plausible de cómo un niño, situado claramente en una fase egocéntrica, puede dominar el uso de pronombres de cambio de persona como "yo" y tú", cuando se supone que el desarrollo intelectual que ha alcanzado no le permite adoptar la perspectiva de alguien más (Bruner, 1982).

Otra importante perspectiva teórica sobre la adquisición del lenguaje es la desarrollada por Chomsky (1957), que propone que los seres humanos nacemos equipados con un poderoso sistema neurológico que nos permite decodificar la gramática del lenguaje natural. Esta concepción sugiere que la adquisición de la estructura sintáctica formal del lenguaje es completamente independiente del conocimiento del mundo, o de una interacción social privilegiada con los hablantes del lenguaje. Según esta postura, la cuestión de los detalles de la adquisición del lenguaje es, sobre todo, un problema de desempeño más que de competencia, la cual es innata. De acuerdo con Chomsky, el desarrollo del desempeño depende totalmente del desarrollo de otros procesos, como la amplitud de atención y la capacidad de procesamiento de información.

La investigación de Bruner ofrece una alternativa que va más allá de las concepciones planteadas por Piaget y Chomsky. Los resultados de su investigación sugieren que el lenguaje natural *no es sólo* una consecuencia del desarrollo intelectual, o *sólo* un resultado del sistema neurológico propio del hombre. De sus principales resultados retomamos para este estudio el de que el lenguaje natural se *enseña*; es decir, que el adulto arregla *artificialmente* el ambiente de manera que sintonice con las posibilidades de comprensión del niño (Bruner, 1983).

Constructos teóricos

En esta sección se abordan los conceptos centrales de la teoría desarrollada por Bruner (1980, 1982, 1983, 1985, 1990), considerados para construir el modelo didáctico para el uso de calculadora en el aula. La sección concluye con la presentación de ese modelo.

El concepto de formato

Bruner (1980) destaca tres facetas en el estudio del lenguaje: *sintaxis*, *semántica* y *pragmática*, esta última es la que adopta para estudiar el proceso de adquisición del lenguaje materno. Los argumentos de Bruner para tomar esta decisión se analizan sucintamente a continuación, en particular porque nos ayudarán a lograr una comprensión más amplia de su posible trascendencia hacia la enseñanza.

La *pragmática* implica procesos diferentes a los empleados en dominar un conjunto de códigos semánticos y sintácticos. La semántica y la sintaxis están formuladas para tratar casi exclusivamente con la comunicación de la información mediante la provisión de un código para "representar" algún conocimiento del mundo "real". En cambio, la pragmática se aboca a estudiar el proceso mediante el cual se llega a

www.FreeLibros.me

emplear el habla para lograr fines sociales, como prometer, humillar, calmar, advertir, declarar o pedir; los elementos de la pragmática no *representan* nada, *son algo*.

Con base en esa concepción, la pragmática se relaciona necesariamente con el discurso, y al mismo tiempo depende del contexto, de un contexto *compartido*. El discurso presupone un compromiso recíproco entre hablantes que incluye al menos tres elementos:

- Un conjunto de convenciones compartidas para establecer la intención del hablante y la disposición del que escucha;
- una base compartida para explotar las posibilidades deícticas del contexto temporal, espacial e interpersonal, y
- medios convencionales para establecer y recuperar lo que otros presuponen.

De este modo se aprecia que el discurso no puede fundamentarse en las categorías gramaticales porque el poder de las reglas que rigen los actos del habla (deícticas y de presuposición del discurso), dependen de su aparición en las expresiones del discurso, y no sólo de la estructura de oraciones individuales.

Muchos actos del discurso son medios para sintonizar estas formas de compromiso recíproco, lo cual se observa en particular en la interacción que se da entre el niño y el adulto que lo tiene bajo su cuidado.

A este respecto, Bruner (1983) generó el concepto de *formato* para analizar la forma en que el adulto arregla el ambiente para lograr interactuar con un niño que todavía no es capaz de comunicarse a través del habla. Un formato es un esquema de interacción que consiste en una rutina de comunicación entre el niño y el adulto; es una forma de interactuar que permite al adulto anticipar las intenciones del niño y a éste las del adulto. Esto implica que para que el niño reciba las claves del lenguaje, primero debe participar en un tipo de relaciones sociales que actúen en consonancia con los usos del lenguaje en el discurso; es decir, con respecto a una intención compartida, una especificación deíctica, y al establecimiento de una presuposición. En otras palabras, se asume que para poder entender lo que un niño dice, o quiere decir, es necesario que se sepa *qué es lo que él está haciendo*. En esta perspectiva, un formato es un esquema de interacción regulada, en el que el niño y el adulto *hacen* cosas el uno para el otro y entre sí. Los formatos, al regular la interacción comunicativa antes de que comience el habla léxico-gramatical entre el niño y la persona, se constituyen en vehículos para la transición de la comunicación al lenguaje. A nivel formal, un formato supone una interacción contingente entre al menos dos partes actuantes; contingente, en el sentido de que puede mostrarse que las respuestas de *cada* miembro dependen de una respuesta anterior del otro. Cada miembro de este par marca una meta y un conjunto de medios para lograrla de modo que se cumplan dos condiciones:

- Que las sucesivas respuestas de un participante sean instrumentales respecto de esa meta.
- Que exista en la secuencia una señal clara que indique la consecución del objetivo.

Aun cuando la estructura de un formato es un esquema altamente regulado, con el tiempo, y en sintonía con el progreso de las capacidades lingüísticas del niño, el adulto

www.FreeLibros.me

introduce sistemáticamente nuevos y más sofisticados elementos que lo convierten en una forma de comunicación cada vez más compleja. Los resultados obtenidos por Bruner indican que las primeras acciones de comunicación entre el niño y el adulto, inclusive antes de que el niño sea capaz de producir su primera expresión lexicológica, tienen lugar básicamente en el marco de esta forma de interacción.

Una característica especial de los formatos en los que participan el niño y el adulto es que son asimétricos respecto de la "conciencia" de los miembros; conciencia, en términos de que en tanto que hay uno *que sabe lo que está pasando*, el otro *sabe menos* o quizá *nada* en absoluto.

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

La aritmética y el álgebra como lenguajes

La construcción de este modelo didáctico parte del reconocimiento explícito de las diferencias que existen entre el lenguaje natural y el código algebraico. Entre las más relevantes destaca la *demanda social,* que está presente en el uso del lenguaje. Esta demanda ubica al lenguaje no sólo como un importante campo de conocimiento, sino que lo coloca al nivel de un medio para la supervivencia, característica que evidentemente no puede atribuirse a los códigos matemáticos. Por su naturaleza, el hombre es un ser social y establece sus relaciones a través del lenguaje. El uso continuo e intenso del lenguaje natural es una de las características que distingue a ésta de otras áreas de conocimiento y lo convierte en un conocimiento indispensable para la vida en sociedad.

La calculadora, adecuadamente empleada, puede simular un microcosmos en el que el lenguaje que "se habla" es el de las matemáticas; de manera más concreta, los códigos de la aritmética, el álgebra y la geometría. Una vez que se oprime la tecla que activa la calculadora, cualquier operación que se quiera hacer después será a través de código matemático. Esto nos lleva a la idea de crear un ambiente de enseñanza basado en el uso de la calculadora, donde la máquina desempeña el papel de una comunidad que exige el uso del lenguaje de las matemáticas. El diseño de ese ambiente de enseñanza es el propósito del modelo didáctico que aquí se analizará; un ambiente en el que los estudiantes participen activamente, que capte su interés y estimule su creatividad intelectual, y que al mismo tiempo favorezca el desarrollo de habilidades matemáticas básicas orientadas a un uso apropiado del código matemático, en particular las habilidades relacionadas con la resolución de problemas mediante el uso de la aritmética y el álgebra.

Este planteamiento concuerda con lo propuesto por Papert (1980) en relación con el ambiente de trabajo que él recreó empleando el lenguaje de programación Logo. Papert concebía las matemáticas como un lenguaje y a Logo como un ambiente que exige el uso del lenguaje matemático; para ilustrar su idea empleaba la metáfora de "si realmente quieres aprender francés, hazlo en Francia".

www.FreeLibros.me

Han pasado casi cuarenta años desde que se empezó a introducir el uso de la calculadora en las clases de matemáticas. En un principio, ésta apareció en el mercado como una herramienta que facilitaría los cálculos aritméticos, y de la calculadora de cuatro operaciones se pasó rápidamente a la "calculadora científica", que incluye funciones matemáticas más sofisticadas y la posibilidad de editar y correr programas de cómputo. A mediados de la década de 1980 se pusieron a disposición del público las primeras calculadoras con capacidad gráfica que, además de las funciones que ofrecen las calculadoras científicas, cuentan con una pantalla que permite editar tablas y gráficas de funciones. A principios de la década de 1990 tuvo lugar el advenimiento de las calculadoras con capacidad de manipulación algebraica, que incluyen nuevos recursos que facilitan la edición y captura de datos (sistemas algebraicos computarizados). Una notable diferencia entre las calculadoras algebraicas y los modelos que las precedieron, es que el código que emplean se rige estrictamente por las formas convencionales de la notación y sintaxis algebraica. Estos hechos han ocasionado que los usos de la calculadora hayan evolucionado sensiblemente, de modo que esta máquina pasó de ser un mero auxiliar para el cálculo aritmético y algebraico, a ser una herramienta que actualmente se emplea como un recurso para mediar el conocimiento (Ruthven, 1996).

Otra notable diferencia entre la adquisición del lenguaje y el aprendizaje del álgebra es la privilegiada relación uno a uno en la cual se fundamenta la enseñanza del lenguaje natural. No obstante, es factible explotar los recursos que ofrecen las calculadoras algebraicas para diseñar una estrategia didáctica orientada a proponer el aprendizaje de la aritmética y el álgebra *a través de su uso*, sin necesidad de partir de una enseñanza basada en reglas, ejemplos y definiciones. Esta hipótesis se fortalece con los resultados de investigación que se analizan más adelante.

La calculadora permite el acceso individual a poderosos procesadores matemáticos, característica que favorece que los estudiantes trabajen en forma más autónoma y privada; el tamaño de la pantalla, aun en el caso de aquellas que son de mayor tamaño, hace que sólo sea posible ver lo que se está haciendo en la máquina si quien lo está procesando lo permite. La privacidad que brinda la calculadora alienta a los estudiantes a explorar distintos acercamientos a la solución de un problema, a afinar sus planteamientos y hacer público su trabajo sólo cuando ellos así lo deciden. Contrario a lo que podría esperarse, la forma individual de trabajo que induce el uso de la calculadora no inhibe el trabajo colaborativo; la retroalimentación inmediata que da la calculadora y la posibilidad que brinda a los estudiantes de explorar soluciones siguiendo sus propias formas de razonamiento, da lugar a la producción de distintas y originales soluciones a un mismo problema, lo cual es un estímulo a compartir y discutir sus hallazgos con sus compañeros y con el profesor (Cedillo, 1996).

Desde luego, esta manera de aproximarse al estudio de las matemáticas no depende solamente del uso de la calculadora, pues el diseño de las actividades de enseñanza y la participación del profesor desempeñan roles determinantes. Las actividades deben plantearse de manera que no haya una única forma de obtener o de expresar una solución, y el profesor debe mantener una actitud favorable para entender formas de solución que él antes no había concebido y estar siempre alerta para aprovechar las oportunidades de aprendizaje que brindan las contribuciones originales de los estudiantes.

www.FreeLibros.me

Comunicación maestro ↔ alumnos

Las premisas que se mencionan a continuación se extrajeron de los planteamientos de Bruner (1983). Luego de cada premisa se enuncia la manera en que se han interpretado en el contexto de un enfoque para la enseñanza de la aritmética y el álgebra *como lenguajes en uso*, explotando los recursos que ofrece la calculadora algebraica.

(1) *El lenguaje se aprende a través del uso, y ese aprendizaje se ayuda de un notable sistema de apoyo.*

Para esto es necesario crear un ambiente de enseñanza en la que la aritmética y el álgebra no se aborden como objeto de estudio, sino como una *herramienta de comunicación*. Es factible diseñar actividades de enseñanza de manera que el primer acercamiento a los códigos aritmético y algebraico se dé como instrumento de comunicación entre el sujeto y la calculadora, sin que al uso de ese código le preceda el conocimiento de reglas y definiciones. Como se ha planteado previamente, el aprendizaje a través del uso depende del cumplimiento de una serie de condiciones, las cuales se abordan con distintos énfasis en las siguientes secciones.

(2) *La relación entre el que enseña y el que aprende es asimétrica. Hay un sujeto que es experto en el uso del lenguaje y desea enseñar lo que sabe, y hay un sujeto que no sabe y quiere aprender.*

El profesor desempeña el papel del experto en el uso de los códigos aritmético y algebraico; su función es encontrar las mejores formas para enseñar lo que sabe. Dado que ni la aritmética ni el álgebra son un requerimiento para la supervivencia, como lo es el lenguaje natural, es necesario arreglar artificialmente el ambiente de enseñanza para lograr que el estudiante se interese genuinamente en el estudio de esta asignatura. Para lograrlo es importante contar con actividades de enseñanza que estimulen el interés y curiosidad intelectual del estudiante, en particular actividades que favorezcan el desarrollo de su creatividad, para así propiciar la generación de una alta autoestima de sus capacidades.

(3) *La enseñanza del lenguaje se da en una relación uno a uno.*

El ambiente de enseñanza puede arreglarse de manera que el profesor atienda individualmente a sus alumnos. La organización de las actividades de enseñanza como *hojas de trabajo* es un recurso de alta utilidad a este respecto.

Una hoja de trabajo es, en extensión, una página. Su contenido debe incluir situaciones en las que el fin que se persigue esté claramente establecido para propiciar que el estudiante inicie de inmediato su trabajo haciendo algo que se concrete en una producción propia. Para esto, es conveniente que la hoja de trabajo proponga un reto intelectual al estudiante; la efectividad didáctica de tal reto depende en gran medida de que debe hacer posible que el estudiante perciba rápidamente *que puede abordar* la actividad, y que *lo único que todavía* no sabe es cómo organizar sus conocimientos anteriores para empezar a resolver el reto que se le está planteando.

www.FreeLibros.me

Entre otras cosas, el uso de las hojas de trabajo con el apoyo de la calculadora algebraica favorece:

- Que el profesor no tenga que estar al frente del grupo exponiendo una lección, lo cual le deja tiempo para atender individualmente las preguntas e intervenciones de los estudiantes.
- Que los estudiantes inicien la actividad sin requerir una presentación preliminar por parte del profesor.
- Que los estudiantes desarrollen su creatividad matemática siguiendo sus propias formas de razonamiento. Esta forma de trabajo propicia que los estudiantes logren producciones originales, de manera que cuando consultan algo con el profesor, éste se ve motivado a seguir la línea de razonamiento del estudiante.
- Que los estudiantes produzcan respuestas cuya originalidad exige al profesor dialogar con ellos para entenderlas y que tome ese diálogo como punto de partida para continuar el análisis con el estudiante. Esto facilita una rica interacción entre pares, donde uno de ellos es experto, y el otro, aún en su calidad de aprendiz, está sometiendo al criterio del experto conjeturas que puede defender con argumentos basados en una validación empírica previa que logró empleando los recursos matemáticos y tecnológicos que tiene a su alcance.

(4) *La enseñanza del lenguaje se modula cuidadosamente para que sintonice con el avance lingüístico del niño. En este proceso es fundamental respetar el ritmo de avance del que aprende.*

La sintonía entre la propuesta de enseñanza y el avance del estudiante es crucial y su logro implica un esfuerzo notable por parte del profesor. Una adecuada organización de la actividad en el aula puede facilitar que el profesor esté siempre al tanto del avance de cada uno sus alumnos, lo cual es un elemento central en el logro de dicha sintonía.

La sintonía entre la propuesta de enseñanza y el avance del estudiante es un punto fundamental en un esquema didáctico, porque cada individuo tiene un ritmo distinto para aprender, y es aquí donde las hojas de trabajo desempeñan un papel central. El paso de cada estudiante puede respetarse si no se le proporciona sólo una hoja de trabajo para que la complete en una sesión de clase, sino un paquete con cuatro o cinco hojas de trabajo. La instrucción del profesor puede ser la siguiente: "Estas actividades son las que deben completar en esta clase; algunos de ustedes las podrán hacer todas, y quizá otros no completen algunas. Lo que realmente importa es que el trabajo que entreguen sea el resultado de su máximo esfuerzo".

El uso de paquetes de hojas de trabajo permite que los estudiantes que avanzan a un ritmo más rápido no detengan su progreso, y que los estudiantes que avanzan con más lentitud puedan acudir a la ayuda del profesor para aclarar sus dudas, o mantener su propio ritmo si trabajan sin tropiezos. Se recomienda, como una regla insoslayable, que ningún estudiante entregue su trabajo en blanco al término de una sesión de clase. En caso de que agoten sus esfuerzos y no puedan avanzar, los estudiantes tienen la obligación de consultar al maestro o a alguno de sus compañeros. La obligación de consultar al maestro, adecuadamente manejada, propicia que los estudiantes formulen preguntas mejor definidas, en lugar de un "no entiendo nada". Las respuestas

www.FreeLibros.me

a esas preguntas deben ser instrumentales para el logro de la actividad con la que han tenido problemas.

Una aparente desventaja de respetar el avance individual de los estudiantes es que al término de algunas sesiones de clase el profesor tiene ante sí un grupo con logros individuales muy heterogéneos. Esto es aparente por al menos dos razones: la primera, porque independientemente de la estrategia de enseñanza, el avance individual de los estudiantes es distinto; segunda, porque esa heterogeneidad se puede aprovechar para generar fructíferas sesiones de "puesta en común" en las cuales el maestro puede organizar un debate con el grupo sobre los aspectos más relevantes de un bloque de actividades. En esa sesión el profesor puede centrar la atención de los estudiantes en las respuestas correctas que se han producido, comentar por qué son correctas y analizar rigurosamente las formas de validación que generan los estudiantes para sus respuestas. Además, y quizá lo más importante, es que el profesor puede desglosar los errores que se hayan presentado, y ante todo, discutir los criterios que permiten dilucidar el que esas respuestas sean incorrectas.

El discurso en el aula

A continuación se expone cómo se adoptaron los principios señalados por Bruner con respecto a los requerimientos para el establecimiento de la comunicación (discurso).

- *Debe existir un conjunto de convenciones compartidas que permitan establecer la intención del hablante y la disposición del que escucha.*

De acuerdo con Bruner (1983), la adquisición del lenguaje se inicia con una etapa de comunicación entre el adulto y el niño, lo cual tiene lugar antes de que el niño pueda emitir su primera expresión léxico-gramatical. Esa comunicación previa al lenguaje se da, además del uso del lenguaje por parte del adulto, con la incorporación de elementos no lingüísticos, como el lenguaje corporal y las acciones. Esos elementos permiten la creación de un puente que apoya la transición de la comunicación prelingüística a la comunicación basada en el lenguaje.

Para emular esa transición, en las hojas de trabajo se empleó como "puente" el referente numérico para dar sentido tanto a los números mismos como al código algebraico. En esas actividades se acude al uso de tablas de valores generadas por una cierta relación numérica para situar al estudiante en un contexto que le es familiar, dado que ha tenido una experiencia de seis años en la escuela primaria trabajando con números. Como se verá con mayor detalle en la sección Resultados de investigación, las respuestas de los estudiantes confirman este supuesto. Cuando empleaban una literal para editar un programa no estaban pensando en la variable contenida en una expresión algebraica, sino que utilizaban esa literal teniendo en mente un número, aquel valor que les dio la clave para identificar la regla que gobierna el patrón numérico con el que estaban trabajando.

La rutina con que se inicia una actividad, "Construí una fórmula que produce la siguiente tabla, ¿puedes encontrar cuál es la fórmula que hice?", se emplea como un medio para establecer "la intención del hablante y la disposición del que escucha". La evidente espontaneidad de los estudiantes para abordar esas actividades sugiere que el juego "adivina qué fórmula utilicé" permite lograr con éxito ese propósito.

www.FreeLibros.me

- *Debe establecerse una base compartida para explotar las posibilidades deícticas del contexto temporal, espacial e interpersonal.*

El logro de este requerimiento descansa en gran medida en la intervención del profesor. La calculadora algebraica es un recurso que exige un uso apropiado de los códigos aritmético y algebraico, lo cual representa ventajas en cierto sentido y desventajas en otro. Por ejemplo, la máquina no acepta expresiones sintácticamente mal estructuradas, que, en referencia con el lenguaje natural, el adulto puede manejar bastante bien durante la etapa de los primeros balbuceos del niño. Una etapa similar ocurre en los primeros encuentros del estudiante con los códigos aritmético y algebraico, en la que el estudiante construye expresiones no ortodoxas que la máquina "no puede entender" a pesar de que para él tienen un claro sentido y debieran funcionar correctamente de acuerdo con su línea de razonamiento. Por ejemplo, cuando quieren construir el 32 usando sólo cuatro "cuatros" producen en la calculadora expresiones como $4 + 4 \times 4 \div 4$; la máquina da por resultado 8 en lugar de 32, como esperaban; o bien, cuando quieren construir una fórmula que "primero sume 2 y luego multiplique por 3", en general su primera aproximación es editar una expresión como $a + 2 \times 3$. Los resultados que ofrece la máquina sitúan en un conflicto al estudiante, que no entiende por qué no está obteniendo las respuestas que desea. En momentos como ése es crucial la intervención del profesor, pues él es quien puede entender las expresiones no ortodoxas de sus estudiantes para auxiliarlos en la transición de los "balbuceos al lenguaje".

Es importante señalar que a pesar de que la calculadora es un excelente medio para producir resultados y trabajar con expresiones aritméticas y algebraicas, la máquina no tiene la capacidad de "entregar" al estudiante nuevas formas de expresión (Ruthven, 1993). Esta situación está contemplada en las hojas de trabajo (vea, por ejemplo, los bloques 1 y 7 en la sección Actividades para la enseñanza). Aquí el profesor desempeña un papel fundamental, ya que él es quien puede decidir de mejor manera cuándo y cómo introducir nuevas reglas sintácticas para la producción de expresiones aritméticas y algebraicas.

- *Debe disponerse de medios convencionales para establecer y recuperar presupuestos.*

El cumplimiento de este requerimiento se basa esencialmente en las posibilidades que brinda una calculadora para registrar y recuperar las cadenas de operaciones aritméticas o las expresiones algebraicas que producen los estudiantes en el proceso de solución de un problema. El fundamento formal para este aspecto descansa en la estructura que brinda la aritmética para el manejo numérico. La aritmética es el recurso en que se sustenta la disposición de medios convencionales para establecer y recuperar presupuestos. El referente numérico es el principal medio de validación en un ambiente de enseñanza como el que aquí se propone. ¿Cómo puede un estudiante que no ha recibido instrucción algebraica estar seguro que la función ("fórmula") $2 \times a + 1$ es la regla que gobierna al patrón numérico 3, 5, 7, 9, 11, ...? La forma de validación disponible para el estudiante es empírica al obtener en la calculadora el valor numérico de $2 \times a + 1$ para $a = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obtiene justamente esa sucesión, y no lo logra con ninguna otra expresión que no sea equivalente a $2 \times a + 1$. La forma de validación que tiene al alcance es inductiva y descansa en un acercamiento empírico al álgebra.

www.FreeLibros.me

Formatos para la enseñanza de la aritmética y el álgebra

El enfoque de aprendizaje de los códigos aritmético y algebraico mediante el uso que aquí se propone, descansa en gran medida en la construcción de formatos de comunicación (en el sentido de Bruner); los formatos son un elemento fundamental para regular la interacción niño-adulto. En pocas palabras, un formato es un esquema de interacción regulada en el que el niño y el adulto *hacen* cosas el uno para el otro y entre sí. Los formatos de comunicación regulan la interacción comunicativa antes de que comience el habla léxico-gramatical entre el niño y la persona a cargo de su cuidado, y se constituyen en vehículos para la transición de la comunicación prelingüística al lenguaje.

En ese orden de ideas, un formato de comunicación debe ser un tipo de actividad altamente regulada que propicie que el estudiante pueda anticipar la intención del profesor y viceversa; además, esos formatos deben hacer factible la incorporación de elementos matemáticos de orden cada vez más complejo que permitan que el estudiante, con el tiempo, avance sensiblemente en el conocimiento de la asignatura que está estudiando. Por otra parte, un formato debe incorporar un conjunto de convenciones compartidas que permitan establecer la intención del hablante y la disposición del que escucha.

Para lograr esto, las actividades de cada hoja de trabajo se diseñaron de manera que estuvieran constituidas por una estructura profunda y una estructura superficial. La estructura profunda tiene como función mantener una actividad rutinaria y altamente regulada, que permite que el estudiante identifique claramente el fin que se persigue (anticipación de intenciones). La estructura superficial tiene como función posibilitar la inclusión de nuevos elementos matemáticos respetando la estructura profunda de la actividad.

Por ejemplo, en el bloque 7 la estructura profunda consiste en una actividad que se inicia con la presentación de un patrón numérico mediante una tabla de valores. Esto conlleva el propósito de que el estudiante conciba esa actividad como un juego que consiste en identificar la regla que genera el patrón numérico que se le da. El juego concluye cuando logra expresar esa regla mediante una fórmula cuya validez puede comprobar usando la calculadora, de manera que pueda reproducir mediante la máquina el patrón numérico dado.

La estructura superficial consiste en una parte de la actividad en que se incorporan distintos tipos de números, nuevas estructuras aritméticas o algebraicas y nuevos conceptos.

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

Introducción

El modelo didáctico que se incluye en este libro se ha sujetado a tres fases de investigación. La primera se llevó a cabo en el periodo 1992-1993, y tuvo como propósito obtener evidencia empírica acerca de la factibilidad del modelo. Los principales indicadores empíricos que se estudiaron fueron las estrategias y nociones algebraicas que los estudiantes desarrollan cuando ese modelo didáctico se aplica en las circunstancias normales del ambiente escolar. En este estudio el investigador desempeñó el papel del profesor durante el año escolar y el trabajo de campo se diseñó de manera que formara parte del tratamiento del programa oficial (Cedillo, 1994, 1995, 1995a, 1996c).

La segunda fase se llevó a cabo en el periodo 1994-1995, y su principal propósito fue investigar los efectos de distintas estrategias de formación de profesores de secundaria para la introducción de la calculadora en el aula. Para este efecto se equipó a tres escuelas secundarias, dos en el Distrito Federal y una en Xalapa, Veracruz.[1] En cada escuela se incorporó un profesor de manera voluntaria; la fase de preparación para los profesores tuvo una duración de cuatro meses, y después de esto se realizó el trabajo de campo en el aula durante seis meses. El investigador se limitó a conducir la etapa de formación de los profesores y a observar, registrar y analizar los eventos que ocurrían en el trabajo en el aula (Cedillo, 1996b).

La tercera fase de esta investigación se inició en 1998 y concluyó en el año 2006.[2] En esta investigación se estudió el potencial de la calculadora algebraica con dos propósitos; el primero era investigar las condiciones que favorecen y limitan la expansión a mayor escala del modelo didáctico que aquí se discute. El segundo propósito fue investigar el potencial de los sistemas algebraicos computarizados (SAC) como factor de cambio en las concepciones de profesores en servicio sobre la enseñanza de las matemáticas y su aprendizaje. En este estudio participaron alrededor de 100 profesores y 15 000 estudiantes, distribuidos en 16 escuelas ubicadas en distintas regiones del país.

Los reportes de este estudio están publicados en un libro

[1] Proyecto aprobado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación Educativa, Convenio SEP-Conacyt.

[2] Proyecto aprobado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, Conacyt.

www.FreeLibros.me

de este mismo autor (Cedillo, 2006). Por cuestiones de espacio, en este reporte se incluyen en esencia los resultados de la primera fase.

Objetivos

Investigar en un ambiente de enseñanza apoyado por el uso de la calculadora programable:

- Qué nociones y estrategias desarrollan los estudiantes cuando el estudio del álgebra se da a través de su uso sin que la enseñanza incluya reglas y definiciones, como ocurre con el aprendizaje de la lengua materna.
- En qué medida las nociones y estrategias no convencionales que desarrollan los estudiantes les permiten abordar tareas que implican manipulación simbólica.
- Investigar en qué medida las estrategias y nociones no convencionales que desarrollan los estudiantes les permiten abordar la solución de problemas algebraicos.

Método

Se adoptó el método de análisis cualitativo (Miles y Huberman, 1984); en particular, se aplicó la técnica de estudio de casos. La investigación se organizó en dos partes, un estudio piloto y un estudio principal. El estudio piloto se realizó durante 10 sesiones de 50 minutos con estudiantes de un grupo escolar que no participaría en el estudio principal. El estudio principal consistió en el trabajo de campo, las etapas de registro y el análisis de datos. El trabajo de campo se llevó a cabo en el ambiente natural del salón de clases, durante 23 sesiones de 50 minutos distribuidas a lo largo de once semanas. El investigador fungió como profesor de matemáticas del grupo experimental durante todo el año escolar, a fin de lograr un conocimiento de los estudiantes que diera un mejor soporte al análisis cualitativo de los datos. La investigación se realizó en una escuela donde el principal criterio de admisión no era el desempeño escolar previo de los estudiantes, sino su disposición para colaborar en un ambiente escolar en el que la disciplina se derivara de la calidad del trabajo.

- *Sujetos*

El grupo constaba de 25 estudiantes de entre 11 y 12 años de edad del primer grado de secundaria que no habían recibido instrucción en álgebra. De ellos se eligieron ocho sujetos cuyo trabajo se observó aplicando la técnica de estudio de casos. Se eligieron de la siguiente manera: los primeros tres meses de trabajo con el grupo escolar aportaron información para seleccionar un niño y una niña con alto aprovechamiento en matemáticas; dos niños y dos niñas con aprovechamiento promedio, y un niño y una niña con aprovechamiento por debajo del promedio. También se registró el trabajo del resto de los estudiantes para aplicarlo durante la fase de análisis de los datos.

- *Fuentes de datos*

Se emplearon tres instrumentos para colectar datos: (1) El trabajo escrito de los estudiantes (60 hojas de trabajo por estudiante); (2) tres entrevistas individuales videograbadas; una al iniciar el estudio, la segunda después de cinco semanas, y la

www.FreeLibros.me

tercera al término del trabajo de campo, y (3) las notas del investigador al término de cada sesión. Las entrevistas se estructuraron a partir de una tarea específica basada en situaciones que los estudiantes no habían abordado en el salón de clases; en esencia, situaciones que implican manipulación simbólica y resolución de problemas. Esto permitió indagar en qué medida la experiencia adquirida por los estudiantes en la etapa de enseñanza podría extenderse a situaciones que requirieran una elaboración más refinada de las nociones y estrategias desarrolladas.

- *Actividades*

Se basaron en el reconocimiento de patrones numéricos para introducir el uso de expresiones algebraicas como medios para representar las reglas que generan esos patrones. Se diseñaron 50 hojas de trabajo que se organizaron en cinco paquetes. En las primeras 15 hojas se introduce el código algebraico; las siguientes 5 tratan del uso de paréntesis y la jerarquía de operaciones; el tercer paquete contenía 10 actividades sobre equivalencia algebraica; el cuarto incluyó 10 actividades sobre representación algebraica de relaciones parte-todo, y el quinto paquete constaba de 10 actividades sobre inversión de funciones lineales (vea los bloques de actividades 1 a 5 en Cedillo, T., y Cruz, V., *Desarrollo del Pensamiento Algebraico*, Pearson, México, 2012).

Las literales y expresiones algebraicas se introducían en las hojas de trabajo como medios para editar programas en una calculadora. Según esto, para los estudiantes una letra no era una incógnita o una variable, sino una etiqueta que indica el nombre de una memoria que la calculadora emplea para almacenar la información que se le introduce, y una expresión algebraica era una cadena de operaciones que los estudiantes construían, en las cuales era necesario incluir el nombre de una memoria (letra); esas cadenas le permitían construir un programa en la calculadora para que se realizara la operación deseada (reproducir un patrón numérico dado, por ejemplo). De acuerdo con lo observado en el estudio piloto, la notación concatenada de coeficientes y variables en la multiplicación algebraica creaba confusión en los estudiantes ($3a$). Con base en esta experiencia, y considerando que este estudio se basa en el acercamiento informal al álgebra, se decidió emplear la notación aritmética de la multiplicación en la edición de expresiones algebraicas; por ejemplo, en vez de $3a$, se usó $3 \times a$.

- *Organización del trabajo en el aula*

El aula contaba con mesas hexagonales que podían ser ocupadas por cuatro o seis estudiantes a la vez, quienes elegían libremente su lugar. Para cada estudiante había una calculadora gráfica que podía utilizar durante la clase y un sobre con su nombre. Al inicio de la sesión los estudiantes tomaban de la mesa del profesor una calculadora y el sobre con las actividades correspondientes. La instrucción para iniciar las actividades era que completaran tantas hojas de trabajo como les fuera posible, y que ninguno podía entregar su trabajo en blanco; pero si agotaban sus esfuerzos y no podían continuar solos, tenían la obligación de acudir al profesor o a cualquiera de sus compañeros para aclarar sus dudas.

Los estudiantes iniciaban su trabajo y el profesor estaba siempre alerta para atender sus inquietudes y discutirlas de manera individual. Al término de la clase los estudiantes colocaban los sobres con sus actividades en la mesa del profesor, que a

www.FreeLibros.me

la siguiente sesión las regresaba revisadas. La revisión del profesor consistía en hacer breves comentarios escritos acerca de las respuestas de los estudiantes siguiendo los lineamientos que se mencionan a continuación: (1) En el caso de errores nunca se daba una respuesta directa para corregirlos, sino que se indicaba qué estaba mal y se planteaba una nueva pregunta al estudiante, con el propósito de que, al contestarla, pudiera encontrar alguna pista que le hiciera evidente el error; (2) en el caso de las respuestas correctas, el profesor agregaba una nueva pregunta con la intención de motivar al estudiante para que encontrara otra forma de resolver el problema planteado, o que le llevara más allá de lo que había logrado.

Resultados

Nociones sobre las literales en expresiones algebraicas

El trabajo escrito y las respuestas en entrevistas individuales de los estudiantes de los tres estratos (alto, medio y bajo), indican que el uso de la calculadora para describir el comportamiento general de patrones numéricos fue un apoyo determinante en el desarrollo de la noción de *literal* como un símbolo que "representa cualquier número", y la noción de *artefactos de cálculo* para las expresiones algebraicas que empleaban para construir programas en la calculadora.

La respuesta de Diego (alumno de nivel promedio) a la pregunta "¿Qué significa para ti la letra que usas cuando construyes un programa en la calculadora?", caracteriza la noción que desarrollaron los estudiantes en torno a las literales algebraicas:

> *"La letra que uso en un programa es el nombre de una memoria de la calculadora,* ***pero en realidad*** *una letra personifica un número, cualquier número... mira, tecleas el programa y le puedes dar distintos valores a la letra (teclea el programa* $a + 3 \times a - 2$ *y lo corre para distintos valores), el programa entiende que debe calcular un nuevo resultado para cada número que introduzcas... no necesitas cambiar la letra".*

Las nociones que desarrollaron los estudiantes en torno al concepto de expresión algebraica pueden resumirse en la respuesta de Erandi (alumna promedio) a la pregunta: "¿Qué significa para ti un programa como los que has hecho en tu calculadora?":

> *"Un programa* (en términos matemáticos "representación algebraica de una función lineal") *sirve para hacer algo... para completar una tabla o para resolver un problema... sirve para decirle a la calculadora cómo hacer lo que tengo en la cabeza para resolver un problema".*

Las respuestas de los estudiantes sugieren que un aspecto clave para el desarrollo de esas nociones fue que la calculadora les permite usar el código de programación no sólo como un medio de edición sino, además, como una *herramienta para calcular*. Otro factor que influyó fue que las actividades se basaron en la descripción de patrones numéricos; este tipo de tarea les ayudó a establecer una conexión entre el nuevo código formal que estaban usando y la experiencia aritmética que habían adquirido en cursos anteriores. La fuerte relación entre las tareas experimentales y

www.FreeLibros.me

la herramienta de cálculo les permitió usar el referente numérico como forma de validación para sus respuestas; por ejemplo, el programa $3 \times b - 1$ genera el patrón numérico 2, 8, 17, 23, para $b = 1, 3, 6, 8$. Si ése era el patrón que querían generar, sabían que el programa que habían construido era correcto; si no, podían analizar de nuevo el patrón e intentar de nuevo.

El hecho de que el código de la calculadora esté ubicado en el ambiente de cálculo de la maquina indujo en los estudiantes la noción de las expresiones de programación como *expresiones para calcular*. La estrategia numérica de *tanteo y refinamiento* que emplearon para validar o refutar las expresiones algebraicas que producían proporciona evidencia en favor de esto. Las actividades sobre reconocimiento y expresión algebraica de patrones numéricos en el ambiente de la calculadora son más que simplemente codificar lo que se está representando, como ocurre en el ambiente del lápiz y el papel. En el contexto de la calculadora, el proceso de simbolización algebraica es más bien el resultado de una interacción entre lo conocido (aritmética), y la consecución de una meta (lograr que la calculadora reproduzca una tabla de valores dada). Los datos de esta investigación sugieren que este tipo de actividad favoreció que los estudiantes transitaran de lo particular a lo general (analizar el comportamiento de un par ordenado específico $a \rightarrow b$ a verificar la validez de la regla que encontraron para aplicarla a cualquier par $x \rightarrow y$ que pudiera estar en la tabla). Las formas de trabajo de los estudiantes indican que esta experiencia fue la clave para que desarrollaran la noción instrumental de literal como "sirve para *personificar cualquier número*", y para una expresión algebarica como "*cosas que sirven para hacer algo... completar una tabla o resolver un problema*".

Los estudiantes se percataron de que el valor numérico de una expresión algebraica no depende de la literal que usen. En la segunda entrevista se les planteó la siguiente situación: "Una alumna de otra escuela dice que los programas $(a + 7) + 2$ y $(z + 7) + 2$ producen resultados distintos. ¿Qué piensas de eso?" Cabe destacar que todos los alumnos rechazaron esa afirmación, lo cual contrasta con los resultados obtenidos por Küchemann (1981) en el ambiente del lápiz y el papel. La respuesta de Jenifer (nivel alto) caracteriza las reacciones que se obtuvieron con el resto de los estudiantes:

> "a *y* z *pueden ser cualquier número... No necesito correr esos programas para saber que los resultados serán los mismos... Yo digo que esos programas producen los mismos resultados porque cuando pones un número en la calculadora no importa si es* a, z *o cualquier otra letra; no importa qué letra uses...* ".

Junto con esta noción los estudiantes desarrollaron otra más amplia, la de que literales diferentes en una expresión pueden representar diferentes valores, pero que también pueden tener el mismo valor. Esto surgió en una pregunta planteada sobre equivalencia algebraica en la tercera entrevista. Se les preguntó si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. La pregunta era totalmente nueva para ellos; sus respuestas enfatizan las posibilidades que brinda el trabajo con la calculadora. Los estudiantes de todos los estratos, con distintos niveles de profundidad, pudieron dar respuestas correctas a esa pregunta. Los estudiantes del nivel alto fueron más allá y encontraron que "*eso puede ser correcto si* $a = 0$, $b = 0$, *o ambos son cero*" (Iván y Jenifer).

Las nociones desarrolladas por los estudiantes en torno a las literales en expresio-

www.FreeLibros.me

nes algebraicas se relacionan con el concepto de variable. El trabajo que mostraron durante el estudio muestra que ellos no sólo asociaron una literal con un conjunto de variables, sino que, además, fueron capaces de trabajar de manera consistente con dos conjuntos de valores asociados: el correspondiente a la literal (dominio de la función) y el de los valores que toma una expresión algebraica para cada valor de la literal (contradominio de la función). En esta asociación se sustentó la estrategia que emplearon para explorar y verificar sus conjeturas.

Este hallazgo contrasta sensiblemente con los resultados de Küchemann (1981) en el ambiente del lápiz y el papel, quien sugiere una categorización jerárquica para la interpretación que los estudiantes dan a las literales en álgebra: como objetos, como números generalizados, y finalmente como variables. Küchemann, siguiendo principios piagetianos, asoció esos roles de las literales a diferentes estadios del desarrollo intelectual de los estudiantes, y propone que la noción de variable sólo se comprende cuando los estudiantes alcanzan el estadio de las operaciones formales. Según esto, las nociones para las letras como objetos y como números generalizados deben preceder a la noción de variable. Los resultados del estudio que aquí se presenta muestran que los estudiantes pueden desarrollar la noción de letras como variables sin tener como antecedente las otras nociones. Aún más, los resultados de este estudio muestran que los estudiantes podían moverse de la noción de letras como variables a la noción de letras como incógnitas; por ejemplo, cuando utilizaban un programa para encontrar valores específicos de la literal a partir de un valor dado para la función. Estos resultados parecen indicar que la noción de variable no parece depender exclusivamente del desarrollo intelectual, sino más bien de formas de enseñanza.

Nociones relacionadas con equivalencia algebraica

Los estudiantes desarrollaron nociones sobre equivalencia algebraica con base en la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas. Esta estrategia marca una clara relación entre esas nociones de equivalencia y el uso del código de la calculadora para describir patrones numéricos.

Los datos obtenidos sugieren que, junto con nociones asociadas al concepto de variable, los estudiantes fueron desarrollando nociones sobre equivalencia algebraica, las cuales, en el tiempo, mostraron ser el recurso más poderoso que desarrollaron para enfrentar un rango más amplio de tareas, como transformación algebraica e inversión de funciones. La noción que desarrollaron los estudiantes sobre equivalencia algebraica puede caracterizarse por la respuesta de Jimena (estrato promedio):

"Dos programas son equivalentes si producen los mismos valores".

El trabajo realizado por los estudiantes durante la fase de campo les hizo posible enfrentar situaciones que nunca antes habían encontrado. Por ejemplo, pudieron enfrentar actividades que involucran dos variables contenidas en expresiones cuadráticas, como el caso de emitir un juicio sobre la validez de la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Como se considera más adelante, esas nociones de equivalencia fueron las herramientas que emplearon los estudiantes para abordar situaciones sobre transformación algebraica. El análisis de los datos obtenidos muestra que esas no-

www.FreeLibros.me

ciones aún deben afinarse; en particular, se ve la necesidad de investigar en qué medida esas nociones basadas en la exploración numérica ayudan u obstruyen un acercamiento formal a la equivalencia algebraica.

Uso de paréntesis y prioridad de operaciones

Los datos recabados indican que los conceptos relacionados con la prioridad de las operaciones aritméticas y el uso de paréntesis son mejor aprehendidos por los estudiantes en situaciones en que esas convenciones sintácticas se utilizan de manera instrumental.

Para esto es crucial que los estudiantes usen el código de la calculadora para expresar su propio razonamiento, lo cual les permitirá darse cuenta que, en ciertos casos, la calculadora opera de manera diferente a la de ellos. Durante el estudio se observó que al trabajar en el ambiente del lápiz y el papel, los estudiantes no estaban conscientes de la prioridad de operaciones y el uso de los paréntesis. De manera contrastante, al trabajar con la calculadora sí tenían presentes esas convenciones sintácticas.

Los estudiantes quisieron saber acerca de esas convenciones cuando entraron en conflicto con sus formas de razonamiento. Por ejemplo, Rocío (nivel bajo) quería construir un programa que *"primero sume 1 y luego divida entre 2"*, y produjo el programa $a + 1 \div 2$, que obviamente no funcionaba como ella quería. Su primera reacción fue pensar que la calculadora se había descompuesto e intentó con la de un compañero; cuando no pudo seguir adelante consultó al profesor, quien le hizo ver por qué su programa no funcionaba. Después de esto no volvió a tener problemas con el uso de los paréntesis (en Cedillo, 1995, se puede encontrar una presentación detallada).

Simplificación de términos semejantes

Los datos recabados sugieren que el uso del código de la calculadora ayudó a los estudiantes a confrontar tareas que involucran la simplificación de términos semejantes. Un aspecto relevante es que este tipo de tarea fue el único en el que los estudiantes tendieron a generar concepciones incorrectas.

Las preguntas que se plantearon en entrevistas individuales a este respecto fueron como la siguiente:

"¿Puedes escribir de manera más breve el programa $a \times 7 + a \times 3$*?*

La estrategia que inicialmente emplearon los estudiantes fue dar valores específicos a la variable. Por ejemplo, después de algunos intentos con distintos valores de la variable, ellos llegaban finalmente a la conclusión de que *"todo lo que hace ese programa es multiplicar por 10"*, y proponían el programa $A \acute{} 10$ como una forma equivalente y más breve para $a \times 7 + a \times 3$. Después de esto se les plantearon situaciones similares que probablemente condujeron a los estudiantes a generar sus propias reglas para salvar el paso de la exploración numérica.

Los datos de esta investigación muestran que una vez que los estudiantes empezaban a generar sus propias reglas sintácticas confiaban totalmente en ellas. La respuesta de Erandi ilustra de buena manera el tipo de errores que tienden a cometer

www.FreeLibros.me

los estudiantes. Ella obtuvo que $a \times 13$ es equivalente a $a \times 2 + a \times 3 + a \times 5$, porque *"los números 2, 3 y 5 suman 10, pero debes agregar 3 porque tienes tres* a *ahí... eso da 13 veces a"*. Erandi estaba segura de que su respuesta era correcta porque estaba aplicando bien esa regla, y eso es cierto; pero mientras esa regla fuera su única forma de validación, difícilmente podría darse cuenta de su error. Aun cuando se le mostró mediante evaluación numérica que esas expresiones no son equivalentes, se resistía a admitirlo.

Como el resto de los estudiantes, Erandi abordó inicialmente la actividad acudiendo a dar valores numéricos a la variable, y una vez que se familiarizó con la actividad generó sus propias reglas, *"se suman los números por los que se está multiplicando la letra"* y dio respuestas correctas al aplicar esa regla. Sin embargo, en la siguiente entrevista ante el mismo tipo de pregunta incluyendo expresiones un poco más complicadas, como $a \times 2 + a \times 3 + a \times 5$, se presentaron los errores que se están analizando.

El tipo de error que cometió Erandi fue el mismo de la mayoría de los estudiantes; los datos recabados sugieren que esos errores se dieron porque, al reconocer la tarea que se le proponía, los estudiantes intentaron recordar procedimientos que aplicaban mecánicamente. Debe hacerse énfasis en que no fue fácil convencer a los estudiantes de que estaban cometiendo un error y en qué consistía, sobre todo porque estaban confiando en una regla generada por ellos mismos. Sin embargo, parece aún más factible que esos errores se cometan cuando las reglas las introduce el profesor, cuestión que parece ofrecer una explicación a las grandes dificultades que muchos estudiantes encuentran para dominar la operatividad algebraica.

Inversión de funciones

A pesar de que la mayoría de los estudiantes no pudo encontrar formas sistemáticas para invertir una función lineal, resulta relevante que todos mostraron haber comprendido para qué sirve obtener la inversa de una función.

Inicialmente, la mayoría de los estudiantes usó una estrategia que consiste en invertir las operaciones en el orden en que éstas aparecen en una expresión algebraica; luego evaluaban la función que obtenían, y hacían ajustes si no aparecían los resultados esperados. Por ejemplo, para invertir la función $a \times 2 - 1$, construían el programa $a \div 2 + 1$; al correr ese programa se daban cuenta que no funcionaba porque $a \times 2 - 1 = 5$ si $A = 3$, pero $a \div 2 + 1 = 3.5$, si $a = 5$. Esto les daba la pista: *"Para ajustar el programa que deshace* $a \times 2 - 1$*"*, *"se pasa por 0.5; entonces debo restar 0.5"*, y obtenían como inversa de la función $a \times 2 - 1$, el programa $a \div 2 + 0.5$, que es justo lo que obtenemos al simplificar $(a - 1) \div 2$. Únicamente los estudiantes del nivel alto fueron capaces de considerar de manera consistente la jerarquía de las operaciones y usar correctamente los paréntesis para invertir funciones lineales.

No obstante, todos los estudiantes entendieron para qué sirve invertir una función. El siguiente episodio con Rocío, estudiante por debajo del promedio, proporciona pruebas para esta afirmación. En la tercera entrevista se le preguntó si el número 877 aparecería en la sucesión 5, 9, 13, 17, ... Después de algunos intentos escribió el programa $b \times 4 + 1$, el cual produce ese patrón numérico, pero inmediatamente aclaró que no era ese programa el que usaría para responder la pregunta que se planteó, sino el programa inverso. Rocío no pudo obtener por sí misma el programa inverso, pero sabía que ese programa es el que le permitiría enfrentar el problema propuesto.

www.FreeLibros.me

Estrategias generadas por los estudiantes

- *Transformación algebraica*

Los estudiantes fueron capaces de enfrentar actividades que diferían notablemente de las que se emplearon en la fase de enseñanza. Esas nuevas actividades se incluyeron en las entrevistas individuales, en las cuales se pedía a los estudiantes que transformaran algebraicamente una expresión lineal de manera que fuera equivalente a otra expresión dada. Las formas en que los estudiantes confrontaron estas tareas indican que la exploración del valor numérico de una expresión algebraica desempeñó un papel determinante en este incipiente acercamiento a la manipulación simbólica.

Una vertiente importante de esta investigación fue indagar si la experiencia que habían adquirido los estudiantes al describir patrones numéricos mediante el código de la calculadora les permitiría abordar actividades que implican manipulación simbólica. Para esto se aplicaron preguntas como las siguientes:

> *"Quería escribir el programa B × 8 pero cometí un error, pues en lugar de eso escribí* b × *7. ¿Puedes corregir eso sin borrar nada de lo que escribí?"*

Debe destacarse que este tipo de actividad no tenía ningún antecedente en las actividades de enseñanza que enfrentaron los estudiantes durante el trabajo de campo, de manera que cualquier intento que hicieran, ya fuera para dar sentido a la actividad o para abordarla, son acercamientos originales que ellos produjeron a partir de una extensión intuitiva de la experiencia que adquirieron al emplear el código de la calculadora. El término intuición se emplea aquí en el sentido de acciones que se sustentan en la experiencia, y que por lo mismo no tienen un fundamento formal.

Las estrategias que generaron los estudiantes indican que emplearon el código de la calculadora como un medio para dar sentido a nuevas situaciones y negociar posibles soluciones, más que simplemente usarlo para representar una idea totalmente estructurada. Este resultado contrasta con el uso del código algebraico en el ambiente del lápiz y el papel, donde dicho código se emplea como el *paso final* en un proceso de razonamiento.

Los estudiantes generaron esencialmente las siguientes estrategias cuando enfrentaron tareas de manipulación simbólica: (1) Ensayo y refinamiento mediante exploración numérica, y (2), operación directa con los términos que contenían variables.

En cuanto a la primera estrategia, Jenny, Erandi y Diego asignaron valores específicos a la variable; por ejemplo, si $b = 1$, $b \times 7 + 1 = b \times 8$, pero esto no funciona para $b = 2$; entonces intentaron con $b = 2$, que hace que $b \times 7 + 2 = b \times 8$, pero sólo funciona en ese caso. De esa manera, estructurando y reestructurando sucesivamente sus razonamientos, concluyeron que lo que debían agregar era justo el valor que le estaban asignando a la variable, lo que finalmente los condujo a producir el programa $b \times 7 + b = b \times 8$. Posteriormente pudieron emplear esta estrategia para abordar casos más complejos.

Jimena (nivel promedio), Raúl (nivel bajo) e Iván (nivel alto) operaron directamente con la variable; por ejemplo, $b \times 10 - 3 \times b$ para hacer que $b \times 10$ fuera equivalente a $b \times 7$. Sin embargo, todos acudieron finalmente a dar valores a la variable para enfrentar tareas más complejas, por ejemplo, cuando se les pidió hacer ese tipo de

www.FreeLibros.me

transformación con expresiones con tres o más términos. Esto sugiere que la sustitución numérica fue la estrategia más sólida que generaron.

La estrategia de ensayo y refinamiento empleada por los estudiantes resalta el papel del código de la calculadora como una herramienta que media el aprendizaje del álgebra escolar. Las formas en que los estudiantes confrontaron las actividades indican que, en general, no usaron el lenguaje de la máquina para describir una idea acabada; más bien, usaron ese código como un medio para dar sentido al problema que enfrentaban y refinar progresivamente sus razonamientos.

Solución de problemas algebraicos

Con diferentes niveles, los estudiantes fueron capaces de usar el código de la calculadora para enfrentar problemas cuyas soluciones pueden obtenerse algebraicamente.

La forma en que los estudiantes abordaron la solución de problemas sugiere que la experiencia que adquirieron trabajando con patrones numéricos les proporcionó un dominio sobre el código formal de la calculadora que les permitió plantear y obtener soluciones. Este resultado difiere de los obtenidos en otros estudios en que se han investigado los efectos de introducir el álgebra escolar a partir del trabajo con patrones numéricos (Stacey, 1989; Herscovics, 1989; Arzarello, 1991; MacGregor y Stacey, 1993 y 1996). Esos estudios reportan dificultades de los estudiantes al generar reglas algebraicas a partir de patrones numéricos. MacGregor y Stacey (1996) concluyen que: "Un enfoque basado en el estudio de patrones y tablas no conduce automáticamente a un mejor aprendizaje, la forma en que se enseña a los estudiantes y la práctica de ejercicios promueven el aprendizaje de una rutina que no conduce a una mayor comprensión". Reportan que los estudiantes fueron capaces de reconocer y describir las relaciones cuantitativas involucradas, pero que sus descripciones son más bien una retóricas (en el sentido de Harper, 1987), lo cual les impide analizar el problema algebraicamente.

Hay varios factores que pueden explicar el fuerte contraste entre los hallazgos de este estudio y los obtenidos por MacGregor y Stacey. Lo que parece la explicación más inmediata es que los estudiantes de MacGregor y Stacey trabajaron en el ambiente del lápiz y el papel, donde el lenguaje natural es la herramienta disponible para que los estudiantes estructuren sus razonamientos. MacGregor y Stacey encontraron que la mayoría de los estudiantes guiaron sus procedimientos por descripciones hechas mediante el lenguaje natural y que ese procedimiento difícilmente apoya que los estudiantes logren una descripción algebraica para las relaciones entre dos variables.

En cambio, la naturaleza operativa del lenguaje de la calculadora ubica al estudiante en un ambiente donde la formulación algebraica se convierte en una parte inherente a la solución del problema que se está enfrentando. El uso del lenguaje de la calculadora conduce al estudiante a describir operativamente las relaciones involucradas en un problema. Cuando los estudiantes trabajan con la calculadora no están buscando, digamos, la relación entre las variables *x* y *y* para encontrar el patrón subyacente (que fue la pregunta que usaron MacGregor y Stacey); el ambiente de la calculadora nos permite hacer la misma pregunta de manera que se conduce a los estudiantes a pensar qué operaciones deben hacer con el *número de entrada* de manera que como resultado obtengan el *número de salida*. Los datos de la presente

www.FreeLibros.me

investigación proporcionan evidencia en favor de esta afirmación: cuando se pidió a los estudiantes que describieran *con sus propias palabras* qué operaciones habían hecho para encontrar el patrón numérico, se obtuvieron respuestas muy vagas, como "sumé" (Jimena, entrevista 1). Sin embargo, Jimena había construido el programa $a + a + 1$; y ciertamente ella sólo sumó, sólo que hay una enorme diferencia entre su descripción verbal y la riqueza de la expresión $a + a + 1$, que nos muestra con claridad cómo razonó para describir el patrón que se muestra en la siguiente tabla:

Núm. de entrada	Núm. de salida
1	3
3	7
5	11
7	15
8	17

Cuando se les propusieron patrones más sofisticados, los estudiantes respondieron al requerimiento de explicar en sus propias palabras lo que hicieron para reconocer el patrón numérico empleando una expresión algebraica, por ejemplo: $3 \times a + 2$, *"porque es más fácil explicarlo con el lenguaje de la calculadora"*. El uso del código de la calculadora favoreció que los estudiantes se concentraran en la estructura operativa de las expresiones que producían en la máquina, ya sea para describir patrones numéricos o relaciones entre los datos involucrados en la solución de un problema.

Este acercamiento operativo no necesariamente ocurre cuando se trabaja en el ambiente del lápiz y el papel, donde el lenguaje natural es la herramienta inmediata de comunicación; esta situación parece conducir a los estudiantes a ver el uso del código algebraico como una imposición del profesor.

El enfoque de enseñanza que se empleó en este estudio proporciona otra posible explicación de los logros de los estudiantes. La principal característica de las actividades que se emplearon en el primer paquete fue poner a los estudiantes en la posición de usuarios del código de la calculadora para lograr que la calculadora hiciera lo que ellos estaban pensando. Ese tipo de actividad guió a los estudiantes, por la experiencia, a que *palparan* la generalidad inherente en las expresiones algebraicas que estaban usando. Las tareas en el segundo paquete los introdujeron al uso de los paréntesis como un recurso para modificar la jerarquía de las operaciones y como una herramienta útil en la construcción de funciones inversas de funciones lineales.

En el tercer paquete de actividades se introdujo la noción de equivalencia algebraica. El trabajo de los estudiantes mostró que su acercamiento espontáneo no fue operar con los términos que contienen variables, sino con los términos independientes (por ejemplo, $3 \times b + 4 = 3 \times b + 8 \div 2$). Sin embargo, en las entrevistas mostraron ser capaces de operar con expresiones algebraicas mucho más complejas que introdujo el investigador. Posteriormente, en el último paquete de actividades, mostraron ser capaces de producir expresiones tan sofisticadas como $[(a \times 3) \times 2 + (a \times 2)] \times 53$, que emplearon para calcular "el costo del marco de madera de cualquier ventana, en las que el largo mide el triple del ancho y el costo por metro del material es de $53.00". Esto resalta la intervención del profesor, pues los estudiantes por sí mismos no

www.FreeLibros.me

podían generar expresiones más complejas que las de la forma $ax + b$; sin embargo, sus respuestas en las entrevistas indican que parecían estar preparados para interactuar con un compañero más competente. Estas reacciones de los estudiantes sugieren que la experiencia que obtuvieron al transformar expresiones algebraicas fue un punto clave para que se percataran de la existencia de expresiones algebraicas que van más allá de las de la forma $ax + b$ que utilizaron al describir patrones numéricos.

Las actividades en el cuarto paquete presentan situaciones en que los estudiantes deben describir algebraicamente relaciones parte-todo, como la longitud de las dos partes en que queda dividido un alambre que mide 16 cm y se corta arbitrariamente (x, y $16 - x$, respectivamente). La complejidad de ese tipo de situaciones se fue incrementando. Por ejemplo, se les propusieron problemas como el siguiente: "Una persona quiere construir una cerca para un terreno rectangular en el que uno de sus lados está limitado por un arroyo. Sólo cuenta con 100 metros de tela de alambre para construir la cerca y quisiera hacerlo de manera que el área del terreno sea lo más grande que se pueda. ¿Puedes programar la calculadora para encontrar las medidas óptimas que debe tener su terreno?".

Los estudiantes fueron capaces de construir expresiones como $(100 - a) \div 2 \times a$ y explorar con diversos valores de la variable para dar respuesta al problema, lo cual proporciona evidencia de que es factible extender la experiencia con patrones numéricos al empleo del código algebraico para representar relaciones cuantitativas involucradas en situaciones más complejas.

Por último, en el quinto paquete de actividades se abordó de manera específica la inversión de funciones lineales. Esas tareas se orientaron a conducir a los estudiantes en la búsqueda de formas sistemáticas para invertir ese tipo de funciones y a afinar sus nociones sobre el uso de los paréntesis. Este fue un tema difícil y aparentemente no lograban dominarlo. Sin embargo, poco tiempo después mostraron avances importantes. En la última entrevista se les planteó la siguiente situación que parecía ser muy compleja: "Observa la siguiente lista de números: 5, 9, 13, 17, ... ¿Encontrarás el número 877 si continúas escribiendo números en esa lista?". Las respuestas de los estudiantes fueron sorprendentes, como la que se expuso anteriormente (Rocío, nivel bajo), y muestran el potencial de la experiencia que obtuvieron usando funciones inversas para encontrar valores específicos de la variable cuando se daba el valor de la función.

Limitaciones

La calidad del aprendizaje que lograron los estudiantes durante este estudio proporciona evidencia empírica en favor de un acercamiento pragmático para una enseñanza del álgebra que ofrece una veta promisoria para explotar los recursos simbólicos que ofrece la calculadora. Sin embargo, consideramos necesario continuar esta investigación para saber más sobre los alcances y limitaciones de las nociones y estrategias que aplicaron los estudiantes para confrontar la solución de problemas. En particular, se observa la necesidad de afinar esos logros de los estudiantes si queremos que lleguen a ser usuarios competentes del código algebraico como herramienta para expresar y justificar generalizaciones.

Una de las limitaciones de este estudio se deriva de su naturaleza cualitativa, lo cual no nos da elementos para aventurar la generalización de sus resultados. En consecuencia, los resultados de este estudio deben ser considerados como una evidencia

www.FreeLibros.me

empírica que documenta un enfoque promisorio para el uso de la calculadora en la enseñanza del álgebra. Aunque implícitamente se deriva de este reporte que la intervención del profesor fue un factor importante, debe hacerse hincapié en que los logros de los estudiantes dependieron en gran medida de la acertada y oportuna intervención del profesor para que extendieran sus posibilidades más allá de lo que las actividades de enseñanza proponen.

Debieran abordarse las siguientes preguntas de investigación en indagaciones posteriores, para atender las limitaciones que se observaron en el presente estudio:

¿En qué sentidos puede favorecer/obstruir un enfoque pragmático la enseñanza del álgebra:

a) el aprendizaje de reglas algebraicas de manipulación simbólica?
b) el aprendizaje de métodos formales para el establecimiento de la equivalencia de funciones?
c) un acercamiento formal al concepto de función?
d) el uso de gráficas como otra forma de representación de relaciones numéricas?
e) que una conjetura sobre relaciones numéricas no puede ser validada con base en lo observado en casos específicos?

Referencias

Booth, L., Algebra: *Children's Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*, NFER-NELSON, Londres, 1984.

Bruner, J., "The social context of language acquisition", Witkin Memorial Lecture, Educational Testing Service, Princeton, Nueva Jersey, 1980.

Bruner, J., "The formats of Language Acquisition", *American Journal of Semiotics*, Vol. 1, Núm. 3, pp. 1-16, 1982.

Bruner, J., *Child's talk*. Nueva York: Norton, 1983.

Bruner, J., Vygotsky: a historical and conceptual perspective, en J. V. Werstch, Ed., Culture, Communication and Cognition: Vygotskian perspectives, Cambridge University Press, 1985.

Bruner, J., *Acts of Meaning*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

Cedillo, T., "Introducing algebra with programmable calculators", *Proceedings of the 16th Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 145-151, Lousiana State University, Baton Rouge, Lousiana, USA, 1994.

Cedillo, T., Introducción al álgebra mediante su uso: Una alternativa factible empleando calculadoras gráficas, *Educación Matemática*, Vol. 3, Núm. 3, Grupo Editorial Iberoamericano, México, 1995.

Cedillo, T., *Un acercamiento lingüístico a la enseñanza del álgebra escolar*, conferencia por invitación, Congreso Anual de la Sociedad Matemática Mexicana, Universidad de San Luis Potosí, México, 1995a.

Cedillo, T., *Number Patterns: A promising start point for students to face algebra problem solving*, XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Algebraic Process and Structure Working Group, Valencia, España, 1996a.

www.FreeLibros.me

Cedillo, T., *Matemáticas en la Escuela Secundaria: Potencial de las calculadoras como apoyo a la enseñanza* (artículo de investigación), Reportes de Investigación Educativa: Proyectos Seleccionados, Didáctica y Curriculum II, Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación Educativa, SEP-Conacyt, Dirección General de Investigación Educativa, SEP, México, 1996b.

Cedillo, T., *Algebra as a Language in-use: A study with 11-12 year olds using graphic calculators*, disertación doctoral, Institute of Education, University of London, RU, 1996c.

Cedillo, T., *Learning from students: a study with in-service middle school mathematics teachers in Mexico, Plenary Session*, Memorias del XXVIII Congreso del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-NA), Mérida, México, 2006.

Chomsky, N., *Learning and the Structure of Language*, University of Chicago, 1957.

Harper, E.,"Ghost of Diouphantus", *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, 18, pp. 75-90, 1987.

Herscovics, N., *Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra*, en S. Wagner and C. Kieran, Eds., Research Issues in the Learning of Algebra, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1989.

Küchemann, D.E., *Algebra*, en K. Hart, Ed., Children's Understanding of Mathematics, pp. 11-16, Londres: Murray, pp. 102-119, 1981.

Lee, L., y Wheeler, D., "The arithmetic connection", *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, 20, pp. 41-54, 1989.

MacGregor, M. y Stacey, K., "Seeing a Pattern and Writing a Rule", *Proceedings of the XVII PME Annual Meeting*, Japón, pp 181-188, 1993.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K., *Thinking Mathematically*, Addison Wesley, Londres, 1984.

Miles, M. y Huberman, A., *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods*, SAGE Publications, Londres, 1984.

Papert, S., *Mindstorms*, The Harvester Press Limited, Sussex, RU, 1980.

Piaget, J., *La construcción de lo real en el niño*, Grijalbo, México, 1985.

Piaget, J., *La psicología de la inteligencia*, Grijalbo, México, 1988.

Ruthven, K., *Technology and the Rationalisation of Teaching*, en C. Keithel, y K. Ruthven, Eds., Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, Springer-Verlag, Londres, 1993.

Ruthven, K., Calculators in the Mathematics Curriculum: the Scope of Personal Computational Technology, International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, 1996.

Stacey, K., "Finding and using patterns in linear generalising problems", *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, 20, pp., 147-164, 1989.

Stacey, K., y MacGregor, M., Curriculum Reform and Approaches to Algebra, para su publicación en Sutherland R. and Rojano T. Eds., *Algebraic Processes and Structure*, PME Working Group, Kluwer, 1996.

www.FreeLibros.me

Guía didáctica

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
1	Valor posicional	Valor posicional	• Lectura de números naturales y decimales. • Resta con números naturales y decimales. • Desarrollo de números. • Potencias de base 10.	Una sesión de 30 minutos. En 30 minutos más, otra sesión para comentar sobre la composición y descomposición de los números naturales y decimales bajo el sistema de numeración decimal, y su conveniencia de que así sea; ¿es más fácil escribirlos?, ¿es más sencilla su lectura?, ¿es más simple operar con ellos?
2	Lectura y escritura de números	Lectura y escritura de números naturales	• Operaciones con números naturales y decimales. • Sistema de numeración decimal.	Una sesión de 20 minutos. En otros 30 minutos el profesor puede conducir un análisis para revisar las dificultades que hayan encontrado los estudiantes y las estrategias eficientes empleadas para aprovechar mejor los recursos de la calculadora; ¿qué semejanzas y diferencias identifican entre la lectura y escritura de números naturales?, ¿cómo es aprovechable "dictarle" números a la calculadora?
3	Equivalencia numérica	Equivalencia numérica	• Uso de las operaciones aritméticas básicas. • Estimación. • Descomposición y composición de un número en sumandos y factores. • Sistema de numeración decimal. • Propiedades de los números: conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro, etcétera. • Cálculo mental.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad, y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Es importante identificar que se trata de problemas con múltiples soluciones, y que a partir de la descomposición y el uso de propiedades de los números es como surge una gran variedad de maneras de componerlos. Conviene identificar cómo es que a través del uso de las propiedades se definen métodos de solución.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
4	¡Se descompuso la tecla para sumar!	Estrategias no convencionales para sumar	• Uso de la resta como operación inversa de la suma. • Estimación. • Cálculo mental. • Iniciación a la resolución de ecuaciones de la forma $x + a = b$.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. O bien, en la segunda sesión el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas que presenten los estudiantes. Una posible manera de guiar a los estudiantes es a partir de la idea "parte-todo", en la que se conoce el todo, una de dos partes, y se desconoce la otra parte.
5	¡Se descompuso la tecla para restar!	Estrategias no convencionales para restar	• Uso de la suma como operación inversa de la resta. • Iniciación a la resolución de ecuaciones de la forma $x - a = b$.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. O bien, en la segunda sesión el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas que presenten los estudiantes. Una posible forma de guiar a los estudiantes es a partir de la idea "parte-todo", en la que se conocen las partes y hay que determinar el todo.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
6	Del cero al cien con sólo cuatro "cuatros"	Uso de las operaciones aritméticas básicas	• Introducción del exponente cero y la raíz cuadrada. • Distintas representaciones de la unidad. • Uso del paréntesis y la prioridad de las operaciones. • Introducción a la producción de cadenas de expresiones numéricas. • Estimación. • Cálculo mental.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. O bien una sesión grupal de 50 minutos en la que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas dadas por los estudiantes. Puede ser de gran ayuda que el profesor aborde esta actividad con un solo número; por ejemplo, el 5. Ahí puede introducir nuevos conceptos como el uso de paréntesis, el exponente cero y la raíz cuadrada. A partir de esto se puede asignar a cada estudiante un número distinto o series de números a equipos de trabajo. Debe considerarse que no todos los números del 0 al 100 pueden expresarse con sólo cuatro cuatros. Aprovechar el hecho de que la calculadora respeta la jerarquía de las operaciones como una oportunidad de introducir el uso de los paréntesis en un ambiente que los exige.
7	¡Al cero en cinco pasos!	Divisibilidad	• Números compuestos. • Noción de número primo. • Estimación. • Cálculo mental.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. O bien una sesión grupal de 50 minutos en la que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas dadas por los estudiantes. Reflexionar acerca de los distintos criterios de divisibilidad, de la pertinencia de utilizar uno u otro, y de buscar construir un número a modo, con el auxilio de la suma y resta, para su rápida reducción a cero. Analizar con detalle los distintos métodos elaborados para resolver la actividad.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
8	¿Cuáles números dividen a otros?	Divisibilidad	• Números compuestos. • Noción de número primo. • Descomposición de números en factores. • Construcción de números con una cantidad de divisores dada. • Cálculo mental.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. O bien, una sesión grupal de 50 minutos en la que el profesor dirige la actividad de los estudiantes a partir de sus respuestas. Es recomendable reflexionar acerca de la relación que hay entre un número y los factores que lo determinan, y cómo se vincula con la noción de divisor.
9	¿Cuáles números se dividen entre el 7 y 11?	Divisibilidad entre 7 y 11	• Noción de divisor. • Relación entre factores de un número y sus divisores. • Primeras reglas de divisibilidad: "Si un número es divisible entre otros dos, también es divisible entre su producto". "Si un número *a* es divisible entre otro número *b*, entonces *a* es divisible entre cualquiera de los factores de *b*".	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. O bien una sesión grupal de 50 minutos en la que el profesor dirige la actividad de los estudiantes a partir de sus respuestas. Se recomienda especial atención del profesor para aprovechar las estrategias originales de los estudiantes. En particular, es importante que el profesor aliente a los estudiantes a justificar sus respuestas y a que traten de generalizar algunas de sus conjeturas.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
10	¿Esos "numerotes" son divisibles entre todo eso?	Divisibilidad entre 7, 11 y 13	• Noción de divisor. • Relación entre factores de un número y sus divisores. • Primeras reglas de divisibilidad: "Si un número es divisible entre otros dos, también es divisible entre su producto". "Si un número *a* es divisible entre otro número *b*, entonces *a* es divisible entre cualquiera de los factores de *b*". • Relación entre el algoritmo de la multiplicación con números enteros y la propiedad distributiva del producto.	Se recomienda especial atención del profesor para aprovechar las estrategias originales de los estudiantes, ya que si se les permite enfrentar el problema con sus propios medios producen soluciones que pueden explotarse para enriquecer las nociones. Por ejemplo, algunos estudiantes han llegado al número 1001 como el "menor número distinto de cero que se construye al repetir un número de tres dígitos: 001001, en tanto que otros lo han obtenido como el producto de 7, 11 y 13. Este tipo de "encuentros" les ha permitido avanzar hacia la justificación que se pide en la actividad.
11	Suma y estimación	Suma y estimación con números decimales	• Descomposición de números decimales en sumandos. • Valor posicional con números decimales. • Cálculo mental. • La resta como operación inversa de la suma.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Es importante sugerir encontrar más de un método para realizar la actividad con el fin de hacer uso de la mayor cantidad posible de herramientas matemáticas.
12	Resta y estimación	Resta y estimación con números decimales	• Valor posicional con números decimales. • Cálculo mental. • La suma como operación inversa de la resta. • Iniciación a la resolución de ecuaciones de la forma $x - a = b$ y $a - x = b$.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. Analizar con cuidado cómo es que las actividades sugeridas de inicio en la hoja de trabajo permiten transitar a la resolución de ecuaciones de la forma $x - a = b$ y $a - x = b$.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
13	Multiplicación y estimación	Multiplicación y estimación con números decimales	• Valor posicional con números decimales. • La división como operación inversa de la multiplicación. • Cálculo mental. • Iniciación a la resolución de ecuaciones de la forma $x/a = b$ y $ax = b$.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Relacionar las actividades de la hoja de trabajo para la construcción de métodos de solución de ecuaciones de la forma $x \div a = b$ y $ax = b$.
14	¡Se descompuso la tecla para multiplicar!	Estrategias no convencionales para multiplicar	• El producto como suma de sumandos iguales. • La división como operación inversa del producto. • Iniciación a la resolución de ecuaciones de la forma $ax = b$.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas.
15	División y estimación	División y estimación con decimales	• Estrategias no convencionales para dividir. • El producto como operación inversa de la división. • Iniciación a la resolución de ecuaciones de la formas $x/a = b$ y $a/x = b$	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Comentar acerca de cómo contribuyen las actividades iniciales de la hoja de trabajo en la conformación de métodos de solución de ecuaciones de la forma $x/a = b$ y $a/x = b$.
16	¡Se descompuso la tecla para dividir!	Estrategias no convencionales para dividir	• La división como una resta iterada. • Relación entre producto y multiplicación como operaciones inversas. • Estimación. • Cálculo mental.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes.
17	Lectura y escritura de números decimales	Lectura y escritura de números decimales	• Valor posicional.	Una sesión de 50 minutos. Comentar acerca de las semejanzas y diferencias entre la lectura y escritura de números decimales. Comentar acerca del rol de la calculadora y la posibilidad de "dictarle" números decimales.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
18	Lectura y escritura de medidas de longitud	Lectura y escritura de medidas de longitud	• Relación entre el sistema decimal de numeración y el sistema decimal de medidas de peso. • Cálculo mental. • Resolución de problemas que involucran distintas unidades de medida.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Reflexionar acerca del rol de la calculadora en la lectura y escritura de números decimales.
19	Lectura y escritura de medidas de peso	Lectura y escritura de medidas de peso	• Relación entre el sistema decimal de numeración y el sistema decimal de medidas de peso. • Cálculo mental. • Resolución de problemas que involucran distintas unidades de medida.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Comentar acerca de las semejanzas y diferencias entre la lectura y la escritura de números decimales.
20	Trans–formaciones en un solo paso	Operaciones que involucran potencias de 10	• Sistema de numeración decimal. • Cálculo mental. • Estimación.	Una sesión grupal de 50 minutos en la que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas de los estudiantes. El profesor debe estimularlos para que produzcan varias respuestas distintas para cada actividad.
21	Se descompuso la tecla del punto decimal	Operaciones que involucran potencias de 10	• Sistema de numeración decimal. • Cálculo mental. • Estimación.	Una sesión grupal de 50 minutos en la que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas de los estudiantes. El profesor debe estimularlos para que produzcan varias respuestas distintas para cada actividad. Reflexionar acerca del rol que desempeña la calculadora en las actividades.
22	Fracciones decimales	Noción de fracción decimal como representación de particiones de la unidad	• Partición de la unidad y formas de representación. • El número 1 como suma de las partes de la unidad. • La escritura de un número decimal como fracción y viceversa. • Nociones básicas de probabilidad y frecuencia relativa.	Una sesión grupal de 50 minutos; 25 para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos, y 25 más en los que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas. Comentar sobre el rol de la calculadora en la hoja de trabajo.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
23	Noción de fracción	Noción de fracción común como representación de particiones de la unidad	• Partición de la unidad y formas de representación. • El número 1 como suma de las partes de la unidad. • Nociones básicas de probabilidad y frecuencia relativa.	Una sesión grupal de 50 minutos; 25 para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos, y 25 más en los que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas. Reflexionar acerca de las fracciones unitarias como elementos básicos para la composición y descomposición en el sistema de fracciones.
24	Fracciones equivalentes	Equivalencia de fracciones	• Suma de fracciones. • Conversión de dos o más fracciones a fracciones equivalentes con un mismo denominador.	Una sesión grupal de 50 minutos; 25 para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos, y 25 más en los que el profesor dirige la actividad a partir de sus respuestas. Discutir sobre la importancia de las fracciones equivalentes en el sistema de fracciones. Comentar acerca del papel de la calculadora en las actividades de la hoja de trabajo.
25	Fracciones y razones	Uso de las fracciones para expresar la relación entre dos magnitudes	• Fracciones equivalentes. • Resolución de problemas.	Una sesión grupal de 50 minutos, 25 para que los alumnos aborden la actividad por sí mismos, y 25 más en los que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas de los alumnos. En una puesta en común es conveniente identificar a la fracción como una forma para expresar la razón entre dos cantidades.
26	Fracciones como operadores	Uso de las fracciones para obtener partes determinadas de cantidades enteras	• Relación entre la división y el producto de fracciones. • Reconocer a la multiplicación de fracciones como "una parte de". • Resolución de problemas.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. Reflexionar acerca del significado del sentido de multiplicar una cantidad entera por una fracción.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
27	¿Cuáles fracciones faltan?	Suma y resta con fracciones comunes	• Cálculo mental con fracciones. • Estimación con fracciones. • Relación entre la suma y la resta como operaciones inversas. • Dada una fracción obtener el complemento a la unidad. • Resolución de ecuaciones que contienen fracciones.	Tres sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos, una para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes, y otra en la que el profesor puede ampliar la perspectiva de los alumnos; por ejemplo, el cálculo mental con fracciones (suma y resta) y la resolución de ecuaciones con cantidades fraccionarias.
28	¿Cómo encuentro esas fracciones?	Suma y resta con fracciones comunes	• Descomposición de fracciones en un número de sumandos dado. • Cálculo mental con fracciones comunes. • Fracciones equivalentes.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Conviene reflexionar acerca de la cualidad del número como una entidad que puede componerse y descomponerse, dando origen a propiedades y operaciones del sistema de fracciones. Observar que existen diversas soluciones y métodos para las actividades. Reflexionar acerca del papel de la calculadora en esta hoja de trabajo.
29	Un poco de fracciones y restas	Suma y resta con fracciones comunes	• Descomposición de fracciones en un número de sumandos dado. • Cálculo mental con fracciones comunes. • Fracciones equivalentes. • Lectura de ecuaciones. • Resolución de ecuaciones que contienen fracciones.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. ¿De qué manera las actividades iniciales de la hoja de trabajo contribuyen a la construcción de métodos para resolver ecuaciones? Comentar acerca del papel de la calculadora en las actividades.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
30	¡Qué fácil es multiplicar con fracciones!	Producto con fracciones	• El producto como una forma de obtener fracciones equivalentes. • Inverso multiplicativo. • Resolución de ecuaciones que contienen fracciones. • La relación inversa entre producto y división con fracciones.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Es conveniente comentar acerca de los contenidos matemáticos que se abordan en la hoja de trabajo y su relación con el sistema de fracciones; por ejemplo, ¿cómo justificaría el algoritmo encontrado para multiplicar dos fracciones?, ¿qué propiedad de las operaciones justifica que al multiplicar numerador y denominador se obtengan fracciones equivalentes?, ¿a qué propiedad corresponde el hecho de que el producto de dos números es 1?, ¿cuál es su importancia?
31	¿Cuál fracción es mayor?	Orden en el conjunto de las fracciones	• La equivalencia como una forma de comparación entre fracciones. • La resta como una forma de comparación entre fracciones. • Densidad en el conjunto de las fracciones.	Tres sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos, otra para la puesta en común de sus distintas respuestas, y una más en la que el profesor puede ampliar la perspectiva. En particular, encontrar estrategias para obtener cualquier número de fracciones que estén entre dos fracciones dadas. Otro aspecto importante es la aplicación de la noción de orden en la solución de problemas.
32	¿Cuáles fracciones dan la suma mayor?	Orden en el conjunto de las fracciones	• Construcción de criterios para determinar qué fracción es menor. • Cálculo mental con fracciones. • Fracciones equivalentes. • Estrategias de conteo.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. Reflexionar acerca del papel de la calculadora en las actividades de la hoja de trabajo.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
33	¿Cómo sumamos números con signo?	Suma de números con signo	• Usos de los números con signo como formas de representación de magnitudes. • Estimación de sumas con números con signo. • Cálculo mental con números con signo.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. Aprovechar parte de la segunda sesión para comentar acerca del rol de la calculadora en esta hoja de trabajo.
34	Algo más sobre sumas de números con signo	Suma de números con signo	• Cálculo mental. • Estimación. • Primeras nociones de orden en el conjunto de los números negativos. • Resolución de ecuaciones que contienen números negativos.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. En la segunda sesión pueden responderse preguntas como: ¿qué propiedades matemáticas se abordan al resolver las actividades?, ¿qué dificultades presentan ecuaciones con cantidades negativas?, ¿de qué manera las actividades iniciales contribuyen a desarrollar métodos para resolver ecuaciones con números negativos?
35	¿Cómo restamos números con signo?	Resta con números con signo	• Introducción al uso de signos concatenados (+ – .– –). • Resolución de ecuaciones que contienen números negativos. • Resolución de ecuaciones que involucran signos concatenados (– –). • Introducción de – 1 como coeficiente implícito. • Resolución de problemas que involucran operaciones con números con signo. • Relación inversa entre la suma y la resta.	Tres sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos, otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes, y una más en la que el profesor puede ampliar la perspectiva de los alumnos, en particular sobre las similitudes entre operar con números positivos y números negativos, y el uso de –1 como coeficiente implícito.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
36	¿Cómo multiplico números con signo?	Producto con números con signo	• Comparación entre el producto con números positivos y con números negativos. • Propiedad conmutativa del producto.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. En la segunda sesión conviene reflexionar acerca de la justificación de números con signo y del papel de la calculadora en estas actividades.
37	Algo más sobre la multiplicación de números con signo	Producto con números con signo	• Producto con más de dos factores. • Determinación del signo del producto a partir del número de factores negativos. • Propiedad asociativa del producto.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. En la segunda sesión puede reflexionarse en la relación entre la propiedad asociativa y la posibilidad de multiplicar tres o más cantidades, así como determinar el signo del producto de tres o más números con signo.
38	¿Cómo divido números con signo?	División con números con signo	• Comparación entre el cociente con números positivos y el cociente con números negativos. • No conmutatividad del cociente.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes incorporando lo que han visto con las operaciones de suma y resta (por ejemplo, el producto como suma iterada y el cociente como resta iterada).
39	Potencias de números con signo	Potencias de números con signo	• Los casos de $-a^n$ y $(-a)^n$ • Determinación del signo de la potencia a partir del signo de la base y de la paridad del exponente. • Propiedad asociativa del producto. • Estrategias para efectuar multiplicaciones iteradas sin usar la calculadora.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas; el profesor debe enriquecer la experiencia de los estudiantes incluyendo actividades del tipo ab^n, con a y b variando el signo de a y b.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
40	Algunas aplicaciones de los números con signo	Resolución de problemas que involucran números con signo	• Operaciones con números con signo. • Valor numérico de expresiones algebraicas. • Signo del valor numérico de x.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes.
41	Exponentes fraccionarios	Estimación, aproximación y redondeo con números decimales	• Introducción numérica de exponentes variables. • Antecedentes a la noción de logaritmo.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. En la segunda sesión conviene analizar la forma en que evolucionó el método de aproximación empleado por los estudiantes, a partir de uno por ensayo y error a uno más formal.
42	Exponentes negativos	Estimación, aproximación y redondeo con números decimales	• Introducción numérica a la relación entre exponentes fraccionarios y radicales. • Nociones de aproximación "por arriba" y "por abajo". • Orden en el conjunto de los números decimales.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. Es conveniente dar sentido a las equivalencias observadas entre los exponentes fraccionarios y decimales con la raíz correspondiente.
43	¡Se descompuso la tecla de raíz cuadrada!	Noción de raíz cuadrada	• Relación inversa entre elevar al cuadrado y obtener la raíz cuadrada de un número. • Nociones de aproximación "por arriba" y "por abajo". • Orden en el conjunto de los números decimales.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y una para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Se recomienda que esta actividad se retome posteriormente varias veces en el desarrollo del curso. Reflexionar acerca del rol de la calculadora en esta hoja de trabajo.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
44	Aproximación "por abajo" y "por arriba"	Noción de raíz cuadrada	• Relación inversa entre elevar al cuadrado y obtener la raíz cuadrada de un número. • Nociones de aproximación "por arriba" y "por abajo". • Orden en el conjunto de los números decimales.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes Se recomienda que esta actividad se retome varias veces durante el desarrollo del curso. Conviene analizar los métodos de aproximación desarrollados para aproximar la raíz cuadrada y establecer su pertinencia en cada caso.
45 y 46	¿Incógnitas? ¿Ecuaciones? ¿Qué es eso? Números perdidos	Solución de ecuaciones de por métodos no convencionales	• Lectura de ecuaciones. • La literal como incógnita. • Valor numérico. • Noción de igualdad. • Operaciones aritméticas. • Ensayo y error.	Dos sesiones de 50 minutos. Conviene destinar un tiempo para comentar acerca de conceptos como igualdad, incógnita y ecuación.
47	Ecuaciones que tienen más de una solución	Solución de ecuaciones de segundo grado por métodos no convencionales	• Lectura de ecuaciones. • La literal como incógnita. • Valor numérico. • Raíces de una ecuación. • Potencias	Una sesión de 50 minutos. Es recomendable destinar un tiempo para discutir acerca de la cantidad de soluciones de una ecuación dependiendo de su grado.
48 y 49	Ecuaciones distintas que tienen la misma solución Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones equivalentes	• Lectura de ecuaciones. • La literal como incógnita. • Valor numérico. • Uso de paréntesis. • Jerarquía de las operaciones.	Dos sesiones de 50 minutos. Destinar un tiempo para discutir acerca de las estrategias para construir ecuaciones equivalentes y los métodos utilizados para resolver ecuaciones cuando aparecen paréntesis e incógnitas en el denominador de una fracción.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
50 y 51	Tanteo y refinamiento Simplificación de ecuaciones	Solución de ecuaciones a partir de la visualización de la ecuación	• Lectura de ecuaciones. • Visualización de ecuaciones. • Hechos numéricos. • Operaciones aritméticas.	Dos sesiones de 50 minutos. Se sugiere dedicar tiempo al análisis en detalle de los métodos propuestos en las hojas de trabajo y su importancia como preparación para abordar métodos formales.
52	Deshaciendo operaciones	Solución de ecuaciones mediante las operaciones contrarias	• Lectura de ecuaciones. • Operaciones aritméticas y su operación contraria. • Uso de paréntesis. • Jerarquía de las operaciones.	Una sesión de 50 minutos. Dedicar tiempo para analizar la importancia de un correcto conocimiento de las operaciones aritméticas, la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis para el método tratado en esta hoja de trabajo.
53	Resolver ecuaciones no es tan difícil	Construcción de ecuaciones a partir de una, dos y tres soluciones	• Escritura de ecuaciones. • Solución de una ecuación. • Operaciones aritméticas. • Noción de igualdad. • Jerarquía de operaciones. • Uso de paréntesis.	Una sesión de 50 minutos. Se recomienda observar que las ecuaciones construidas cumplan con lo solicitado y revisar las estrategias utilizadas para la construcción de las ecuaciones solicitadas.
54 a 57	Potencias y simbolización	Iniciación al uso de literales	• Introducción a la representación de generalizaciones usando el código algebraico. • Reconocimiento de patrones numéricos generados al elevar distintos números a una misma potencia.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Es recomendable abrir un espacio en la segunda sesión para comentar acerca de las reglas algebraicas identificadas y reflexionar sobre el rol de la calculadora en la introducción al uso de literales a través del reconocimiento de patrones en tablas de entrada y salida.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
58	¿Qué significa "elevar a la menos 1"?	Notación exponencial	• Significado instrumental del exponente –1. • Introducción a la representación de generalizaciones usando el código algebraico. • Reconocimiento de patrones numéricos generados al elevar distintos números a una misma potencia.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de sus distintas respuestas. Se recomienda reflexionar acerca del uso de potencias con exponentes negativos y sus correspondientes potencias equivalentes.
59 y 60	Leyes de los exponentes	Iniciación al uso de literales	• Introducción numérica a las leyes de los exponentes para el producto con expresiones algebraicas no lineales.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Abrir un espacio en la segunda sesión para comentar acerca de errores comunes al operar en el álgebra y el papel de la calculadora en estas hojas de trabajo
61	¿Una potencia que siempre da por resultado 1?	Significado del exponente cero	• Introducción a la representación de generalizaciones usando el código algebraico. • Reconocimiento de patrones numéricos generados al elevar distintos números a una misma potencia. • Sistemas de numeración.	Una sesión grupal de 50 minutos; 25 para que los alumnos aborden la actividad por sí mismos, y 25 más en los que el profesor dirige la actividad a partir de las respuestas de los estudiantes.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
62 63 64 65 66 67 68	Simbolización: números consecutivos Términos semejantes Equivalencia algebraica Simbolización algebraica y resolución de problemas	Primeras reglas de escritura algebraica	• Introducción a la representación de generalizaciones usando el código algebraico. • Reconocimiento de patrones numéricos generados al elevar distintos números a una misma potencia. • Uso del código algebraico para plantear y resolver problemas.	Tres sesiones de 50 minutos. Dos para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y una para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Para el trabajo con estas actividades es recomendable tener en cuenta los errores comunes al operar en el álgebra y comentar acerca de la contribución de estas hojas de trabajo al respecto.
69	¡Esto sí está difícil! Recursividad: La tecla ANS	Iniciación al uso de literales	• Introducción instrumental al uso de la noción de recursividad. • Reconocimiento de patrones numéricos generados al aplicar recursivamente una misma secuencia de operaciones a distintos números. • Introducción a la representación de generalizaciones usando el código algebraico.	Dos sesiones de 50 minutos. Una para que los estudiantes aborden la actividad por sí mismos y otra para la puesta en común de las distintas respuestas de los estudiantes. Reflexionar sobre el rol que desempeña la calculadora en estas actividades.
70	Patrones numéricos y gráficas	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y uso de coordenadas para denotar un punto en el plano	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica.	En 20 minutos de una sesión (en el caso de que sea la primer vez que se utilice el ambiente gráfico de la calculadora, el tiempo recomendado puede ser de 35 minutos). Dedicar 10 minutos a escuchar las descripciones de los estudiantes acerca de la gráfica construida, con el propósito de comenzar a destacar aspectos como los cruces con los ejes cartesianos y su orientación.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
71	Patrones numéricos y coordenadas cartesianas	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y correspondencia uno a uno	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano cartesiano. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica.	En 20 minutos de una sesión. Destinar 10 minutos a comentar con los estudiantes acerca de la inclinación de la recta construida, en comparación con la de la hoja anterior, y comenzar a establecer conjeturas al respecto.
72	Ecuaciones lineales y sus gráficas	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y relación uno a uno de una función	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano. • Reconocimiento de los ejes cartesianos. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica.	En 20 minutos de una sesión, el profesor puede aprovechar para nombrar al eje vertical como el eje de las ordenadas y al eje horizontal como el eje de las abscisas. Conviene hacer un espacio de para comentar acerca de la función identidad tratada en esta hoja de trabajo, comentando acerca de su inclinación, la relación entre los conjuntos de números que conforman los valores de entrada y los de salida y su cruce con los ejes cartesianos.
73	Inclinación de una recta en un plano cartesiano	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y pendiente	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano. • Identificación de los cuadrantes en el plano cartesiano. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica.	En 20 minutos de una sesión, en esta actividad es conveniente que el profesor se asegure que los estudiantes comiencen a reconocer el cambio en la pendiente de las gráficas de funciones lineales al modificar m en las expresiones de la forma $y = mx + b$.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
74	Ubicación de la recta en el plano cartesiano	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y signos de las coordenadas de un punto de acuerdo al cuadrante en que están	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos. • Identificación de los cuadrantes en el plano cartesiano. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica.	En una sesión de 50 minutos es posible resolver las tres actividades. En la actividad 75 se debe hacer que los alumnos observen cómo se va construyendo la gráfica en la calculadora, y que puedan entender por qué se dice que decrece. Conviene hacer un espacio para comentar acerca de las rectas con pendiente negativa y observar el comportamiento de los valores numéricos de sus coordenadas.
75	Noción de crecimiento en una recta en el plano			
76	Rectas y cuadrantes del plano cartesiano			
77	Puntos relevantes en la gráfica de una ecuación lineal (1)	Plano cartesiano, construcción de gráficas de funciones lineales e intersección de la gráfica con los ejes cartesianos	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales en la calculadora. • Localización de puntos en el plano. • Identificación de los cuadrantes en el plano cartesiano. • Trazo con lápiz y papel de gráficas de funciones lineales. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica y de la representación tabular a la gráfica.	En 25 minutos de una sesión. Es la primera actividad que considera una recta que pasa fuera del origen del plano cartesiano, por lo cual es conveniente hacer un espacio para comentar acerca de la ordenada al origen, el cruce con el eje de las abscisas y la traslación de rectas en el plano.
78	Puntos relevantes en la gráfica de una ecuación lineal (2)	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y reconocimiento de un punto que pertenece a una función a partir de sus coordenadas	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano. • Identificación de los cuadrantes en el plano cartesiano. • Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Traducción de la representación tabular a la algebraica y de la representación tabular a la gráfica.	En 25 minutos de una sesión. La hoja de trabajo 79 es la segunda actividad con rectas fuera del origen; conviene centrar la atención en los cruces con los ejes cartesianos y la inclinación de la gráfica, ya que es la primera actividad que conjuga una transformación vertical en el plano y el efecto del coeficiente (pendiente).
79	Iniciación a la lectura de gráficas de funciones lineales			

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
80	Ecuaciones lineales y coordenadas en el plano	Plano cartesiano y gráficas de funciones lineales e intersección de la gráfica con los ejes cartesianos	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano. • Identificación de los cuadrantes en el plano cartesiano. • Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Traducción de la representación tabular a la representación algebraica y de la representación tabular a la gráfica.	En 20 minutos de una sesión. Es conveniente abrir un espacio para comentar acerca de la lectura y escritura de coordenadas de puntos, y de la relación funcional que hay entre la ordenada y la abscisa.
81	Los puntos de la gráfica de una ecuación lineal (1)	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y reconocimiento de puntos que pertenecen a una misma función lineal	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano. • Trazo de gráficas con lápiz y papel. Traducción de la representación tabular a la representación algebraica y de la representación tabular a la gráfica.	En 25 minutos de una sesión. Es recomendable aprovechar que la actividad indica la ubicación de una mayor cantidad de puntos en la gráfica para sugerir el hecho de que siempre es posible encontrar un nuevo punto entre otros dos.
82	Rectas paralelas en plano cartesiano	Plano cartesiano, gráficas de funciones y parte de la familia de la función lineal	• Construcción de gráficas lineales. • Identificación de los cuadrantes en el plano cartesiano. • Traducción de la representación algebraica a la representación tabular.	En una sesión de 50 minutos. La hoja de trabajo indica la familiarización con rectas paralelas, por lo que se sugiere analizar el comportamiento de la ordenada al origen y la pendiente en el caso de que las rectas sean paralelas.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
83 84	Rectas horizontales (1) Rectas horizontales (2)	Plano cartesiano, gráficas de funciones constantes y funciones con relación muchos a uno	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones constantes. • Localización de puntos en el plano. • Trazo de gráficas con lápiz y papel. Traducción de la representación tabular a la representación algebraica y de la representación tabular a la gráfica.	Ambas actividades pueden resolverse en una sesión de 50 minutos. Conviene dedicar un tiempo para analizar la relación entre la gráfica y la ecuación de la función constante, comentando acerca del comportamiento de la inclinación de una recta cuando la pendiente es mayor que 1, igual a cero y menor que 1.
85 86	Por puntos determinan una recta ¿Cuáles puntos están en una recta?	Plano cartesiano, construcción de la gráfica de una función lineal a partir de dos puntos dados y reconocimiento de un punto que pertenece a una función a partir de sus coordenadas	• Patrones numéricos. • Construcción de gráficas de funciones lineales. • Localización de puntos en el plano. • Trazo de gráficas con lápiz y papel. Traducción de la representación tabular a la gráfica y de la representación tabular a la algebraica.	Ambas actividades pueden ser resueltas en una sesión de 50 minutos. Es muy importante que el maestro dedique en la actividad 85 al menos unos 15 minutos para discutir en clase la posibilidad de construir la gráfica de una función lineal a partir de que se conocen dos de sus puntos.
87 88	Otro tipo de ecuaciones Otro tipo de gráficas	Plano cartesiano, gráficas de funciones cuadráticas, dominio y contradominio e intersección de las gráficas con los ejes cartesianos	• Lectura de gráficas. • Patrones numéricos. • Construcción de gráficas. • Traducción de la representación tabular a la gráfica y de la representación tabular a la algebraica.	En 30 minutos de una sesión cada actividad. Se trata del primer contacto de los estudiantes con parábolas, por lo que es conveniente, que el profesor sugiera a los estudiantes construir la parábola como una curva y no como segmentos de rectas que se unen entre los puntos marcados.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
89 90 91	De rectas a sus ecuaciones De parábolas a sus ecuaciones Puntos y ecuaciones (1)	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y cuadráticas	• Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Localización de puntos en el plano. • Traducción entre las representaciones gráfica y tabular, y entre las representaciones gráfica y algebraica.	En 30 minutos de una sesión cada actividad. Aunque en algunas actividades se propone a los estudiantes completar una tabla antes de que encuentren la expresión algebraica, es posible que no requieran de completar la tabla, así que puede tomarse como correcta la actividad si los estudiantes justifican la traducción directa entre la gráfica y la forma algebraica.
92	Puntos y ecuaciones (2)	Plano cartesiano, gráficas de funciones cuadráticas, dominio y contradominio	• Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Localización de puntos en el plano. • Traducción de la representación tabular a la gráfica y de la representación tabular a la algebraica.	En 30 minutos de una sesión. Es conveniente destinar un tiempo para reflexionar en grupo acerca del dominio y contradominio de la función cuadrática en cuestión.
93 94 95	¿Entre dos puntos hay otro punto?	Plano cartesiano, gráficas de funciones lineales y densidad cuando el dominio de una función son los números reales	• Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Localización de puntos en el plano. • Traducción de la representación tabular a la gráfica y de la representación tabular a la algebraica.	En una sesión de 50 minutos ambas actividades. El uso de TRACE al recorrer una gráfica impide observar algunos valores del dominio de la función, especialmente si dichos valores tienen varios decimales, así que se recomienda al profesor sugerir al estudiante que ajuste el ZOOM, o incluso utilice otra forma de representación (algebraica o tabular) para verificar la densidad. A partir de la respuesta de las hojas de trabajo 94 y 95, conviene reflexionar acerca de los valores numéricos de la función cuando se acerca y aleja de un valor máximo o mínimo.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo		Tema explícito	Temas implícitos	Sugerencias para el trabajo en el aula
96	Parábolas y traslaciones en el plano	Plano cartesiano, gráficas de funciones cuadráticas, dominio y contradominio, y familia de la función cuadrática	• Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Localización de puntos en el plano. • Traducción de representación algebraica a la tabular y viceversa, además de la traducción de la forma tabular a la gráfica.	Las cuatro actividades, en dos sesiones de 50 minutos. Es recomendable dedicar un tiempo para obtener conclusiones acerca de los efectos que producen en las parábolas la variación de los valores de los parámetros de sus ecuaciones.
97	¿Qué modifica estas parábolas?			
98	Reflexión de una parábola			
99	Puntos en el plano	Plano cartesiano y gráficas de funciones: lineales y cuadráticas, y sus inversas	• Trazo de gráficas con lápiz y papel. • Localización de puntos en el plano. • Encontrar la función inversa de una función dada. • Jerarquización de operaciones. • Uso de paréntesis. • Traducción de la representación tabular a la algebraica y de la representación tabular a la gráfica.	En un tiempo de 25 minutos por hoja de trabajo. Es conveniente destinar un tiempo para obtener conclusiones acerca de las distintas representaciones de una función y su inversa; por ejemplo, la simetría entre sus gráficas, la relación entre su dominio y contradominio, los procesos algebraicos para obtener una ecuación a partir de la otra, etcétera.
100	Dibujando con puntos			
101	Movimientos rígidos y puntos en el plano			
102	Traslaciones y simetrías con gráficas			
103	¿Unos estudiantes hicieron esos dibujos?			

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

Manual básico para el uso de un sistema algebraico computarizado (SAC)

Actualmente ya no está en discusión la pertinencia del uso de calculadoras y computadoras para apoyar la enseñanza y el aprendizaje en las clases de matemáticas; antes bien, lo que procede hoy día es el desarrollo de proyectos que coadyuven a potencializar el uso de la tecnología. En un principio, las calculadoras aritméticas se incorporaron a las clases de matemáticas; les siguieron las calculadoras científicas, después las calculadoras con capacidad gráfica y, por último, las que incluyen un sistema algebraico computarizado (SAC).

Un sistema algebraico computarizado dispone de un ambiente para producir y manipular gráficas de funciones, ofrece poderosos recursos para realizar todo tipo de operaciones numéricas y algebraicas. Estos tres aspectos son de suma importancia debido a su utilidad en el trabajo con los números, las ecuaciones y las funciones. Los SAC brindan también la posibilidad de almacenar y procesar una gran cantidad de datos a través de tablas, gráficas y ecuaciones, haciéndolos aún más asequibles.

Una característica relevante de los SAC es que la sintaxis y semántica que rigen su escritura son las que se emplean de manera convencional en matemáticas, lo cual permite al usuario introducirse de manera natural en el uso formal de los códigos aritmético y algebraico. Si el usuario no respeta la sintaxis matemática formal, el sistema emitirá el mensaje "error de sintaxis".

En la actualidad es frecuente encontrar instalado un SAC en dispositivos portátiles como calculadoras, tabletas y los *smartphone*, así como en todo tipo de computadoras. Esto permite al usuario emplearlo como un instrumento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es preciso destacar que no sólo es importante poseer una calculadora con estas características, sino que su disponibilidad es relevante por las ventajas que brindan estos recursos tecnológicos como mediadores en la adquisición del conocimiento matemático. A manera de ejemplo, vea la sección Investigación que se ha incluido en este volumen.

En este Manual básico se abordan sólo aquellos aspectos del funcionamiento de un SAC que están directamente relacionados con las actividades de aprendizaje de este libro. Si bien hay variantes entre las diferentes versiones de un SAC, su lógica es similar, lo cual hace plausible tomar como base las descripciones que se muestran a continuación.

www.FreeLibros.me

Pantalla inicial (HOME)

En un SAC, la pantalla inicial (Home) consta de tres secciones: (1) La sección superior muestra una "barra de aplicaciones"; (2) en la sección intermedia se imprimen las operaciones que el usuario realiza (Historial), y (3) la sección inferior es la línea de edición en la cual se muestran las operaciones o instrucciones que introduce el usuario. Al oprimir la tecla ENTER esas operaciones o instrucciones se imprimen en la pantalla "Historial". Como se muestra enseguida, es posible navegar entre las operaciones impresas en el historial, recuperarlas y reeditarlas si fuera necesario.

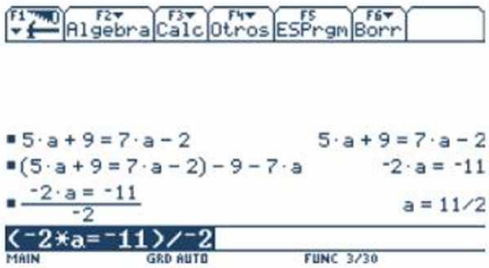


Figura 1

En la línea de edición se escriben las expresiones matemáticas de entrada; una vez que se oprime la tecla ENTER, esas expresiones pasan a formar parte del historial con su respectivo resultado (salida). En la pantalla es posible distinguir entre las expresiones de entrada y las de salida; las de la izquierda son las expresiones de entrada y las de la derecha las son las de salida.

A continuación se presentan ejemplos de expresiones de "entrada" y "salida" de un SAC instalado en una calculadora.

Ambiente numérico

Valor exacto y aproximado

Un SAC puede producir los resultados de cálculos numéricos en forma exacta o aproximada. Cuando está configurado para producir resultados exactos, el valor numérico que despliega el SAC al efectuar una operación numérica corresponde al tipo de número que resulta sin acudir a la expresión decimal. Por ejemplo, las operaciones 34 + 2 y raíz cuadrada de 361 producen un valor entero; el cociente 8/6 produce 4/3, que es su forma simplificada, y el resultado de la raíz cuadrada de 24 es un número irracional que simplificado es $2\sqrt{6}$.

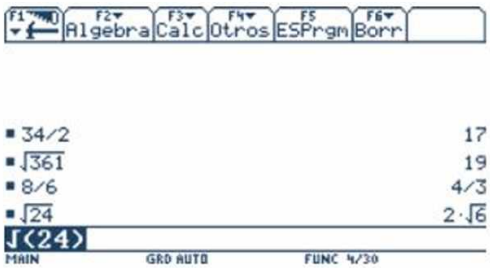


Figura 2

www.FreeLibros.me

Cuando el SAC está configurado para producir valores aproximados, los resultados de los cálculos numéricos se expresan en forma decimal; inclusive, las cantidades enteras se despliegan con un punto decimal.

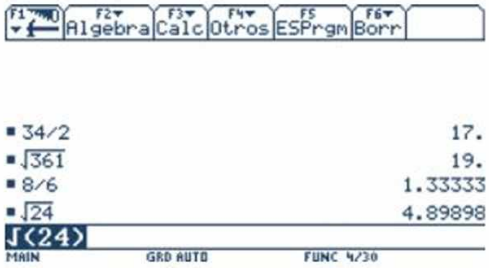


Figura 3

Operaciones concatenadas

En un SAC es posible escribir cadenas de operaciones en una sola línea. La ejecución de las operaciones concatenadas se apega a la jerarquía de las operaciones aritméticas.

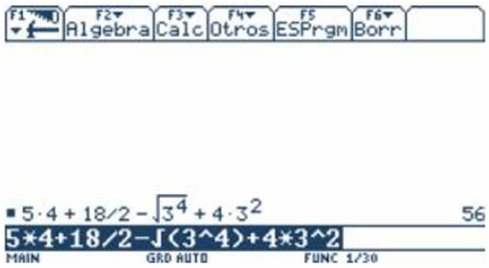


Figura 4

El uso de los paréntesis como signos de agrupación se emplea para modificar el orden en que se ejecutan las operaciones, lo cual es posible constatar al obtener el resultado correspondiente.

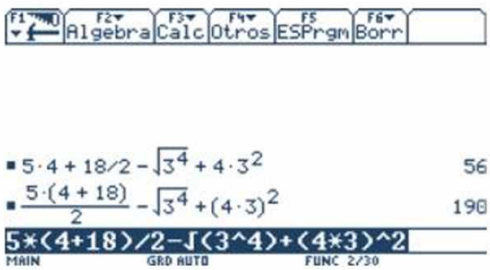


Figura 5

La resta y el signo negativo

En el SAC los signos están diferenciados para indicar cuándo se refiere a la operación de resta y cuándo se refiere a un número como negativo.

www.FreeLibros.me

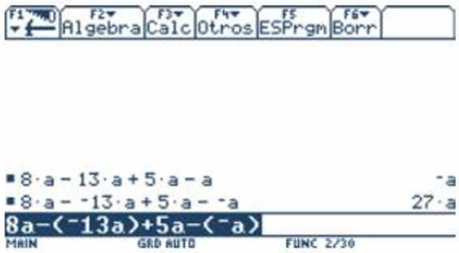


Figura 6

Esta diferenciación se hace evidente en casos donde se desea usar el signo negativo para efectuar una resta; en tales situaciones el SAC lo interpreta como un producto, pero si se usa el signo de resta para indicar que un número es negativo, el SAC lo identifica como un error de sintaxis.

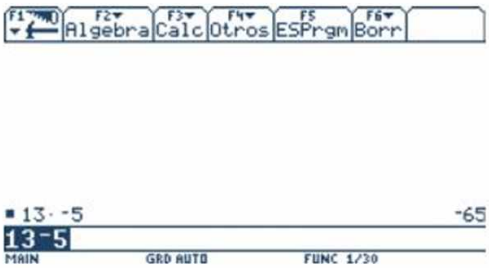


Figura 7

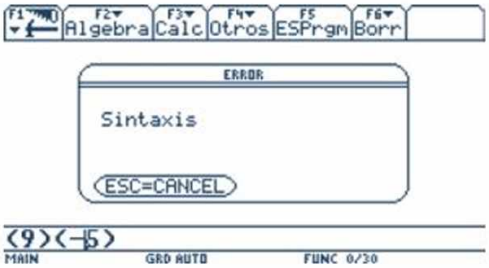


Figura 8

Potencias

El cálculo de potencias respeta las leyes de los exponentes y acepta diferentes tipos de números tanto en la base como en el exponente. Para escribir el exponente se utiliza un símbolo especial en forma de ^ (v invertida).

Figura 9

Operaciones con fracciones

Los cálculos con fracciones comunes son posibles cuando el SAC está configurado para ofrecer resultados exactos. La línea de fracción se despliega en el Historial aun cuando el cociente se indique con una / en la línea de edición.

www.FreeLibros.me

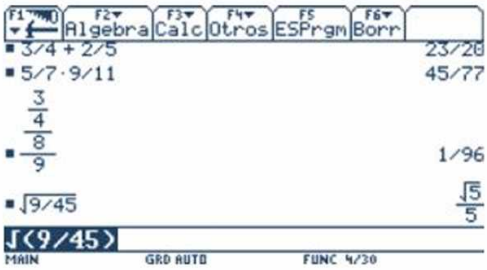


Figura 10

Función ans( )

La función ans( ) permite recuperar el último resultado que obtuvo el SAC y operar con él, sin importar si se trata de un valor numérico o una expresión algebraica. Para aplicar la función *ans( )* basta introducir al inicio de la linea de edición la operación a realizar, y enseguida el operando o más operaciones y operandos; también es posible escribir directamente *ans(1)*.

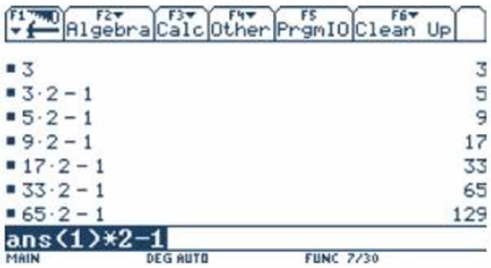


Figura 11

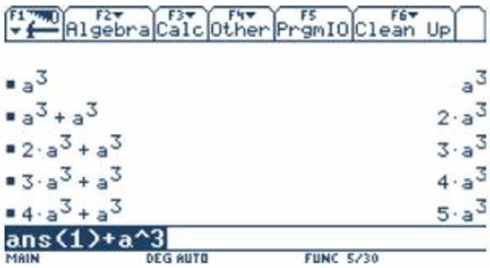


Figura 12

En el caso que se desee recuperar un valor que no sea el último que obtuvo el SAC, basta cambiar el valor del paréntesis, el cual corresponde al número de linea del historial, numerando las líneas de abajo hacia arriba.

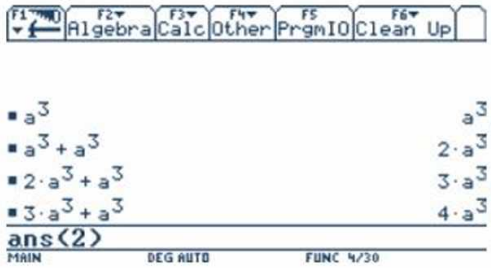


Figura 13

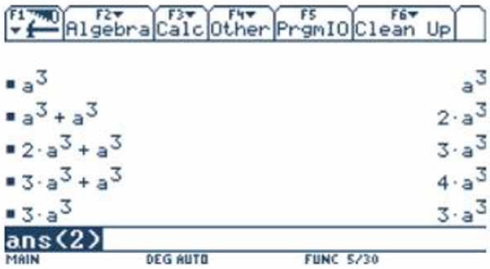


Figura 14

Los primeros seis bloques de las actividades del libro pueden realizarse en el ambiente numérico del SAC. En los bloques deben tenerse en cuenta todos los aspectos mostrados, aunque hay algunos que son muy importantes. Para ciertas actividades con números naturales conviene tener en cuenta el orden de las operaciones y el uso de paréntesis. Por ejemplo, las hojas de trabajo Equivalencia numérica y Del cero al cien

www.FreeLibros.me

con sólo cuatro "cuatros" es conveniente que los resultados obtenidos sean exactos, y que en el de decimales los resultados sean aproximados. Para el bloque de números con signo debe tenerse en cuenta que hay un signo para la resta y otro para los números negativos; para las actividades de potencias debe saberse bien cómo escribirlas en el SAC; y para el de ecuaciones lo importante es el uso de los paréntesis.

Ambiente simbólico

Valor numérico de expresiones algebraicas

El cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas puede hacerse escribiendo la expresión en la línea de edición, enseguida la barra vertical | (que se lee *tal que*) la cual se encuentra en el teclado del SAC, y a continuación la variable seguida del signo igual (=) y los valores asignados a dicha variable separados por comas y encerrados entre *llaves*, como se muestra en las siguientes figuras.

Una vez ejecutada la acción, el SAC despliega en el Historial los valores de salida que se obtienen para cada valor de entrada que se escribió entre llaves. En el caso de que la fórmula tenga más de una variable, éstas pueden agregarse utilizando la conjunción *and*.

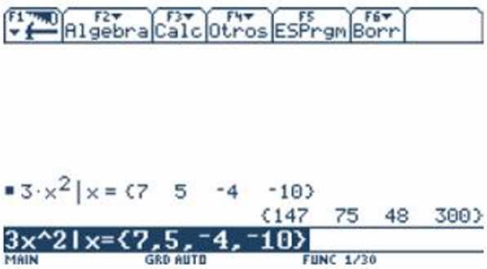


Figura 15

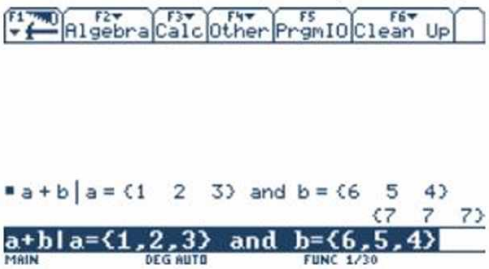


Figura 16

Esta herramienta del SAC es primordial para los bloques 7 a 10, en los cuales es necesario completar tablas y escribir sus fórmulas. Una fórmula es una expresión algebraica y los valores asignados a la literal y sus resultados equivalen a los valores de entrada y salida de las tablas. La siguiente tabla aparece en la hoja de trabajo 54 y se ilustra su fórmula escrita en el SAC, con los respectivos valores de entrada y de salida.

Valor de entrada	Valor de salida
2	4
3	9
5	25
7	49
8	64

Figura 17

www.FreeLibros.me

Manipulación simbólica

Un recurso esencial de un SAC es su capacidad de manipulación simbólica. En una gran cantidad de expresiones de entrada hay una salida que es el resultado de una operación o transformación, la cual se efectúa de acuerdo con las reglas algebraicas convencionales. Desde la perspectiva educativa, este recurso brinda oportunidades didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

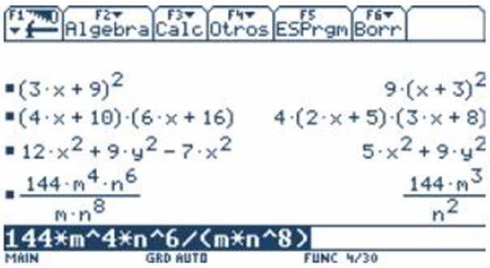


Figura 18

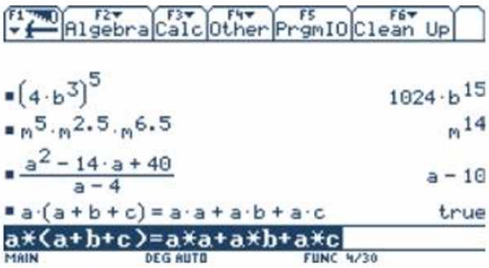


Figura 19

Comandos algebraicos

Los comandos algebraicos permiten realizar transformaciones algebraicas y resolver ecuaciones entre otras acciones. El comando *solve( )* resuelve ecuaciones con respecto a la incógnita que se indique; *factor( )* efectúa la factorización de expresiones algebraicas y *expand( )* las desarrolla.

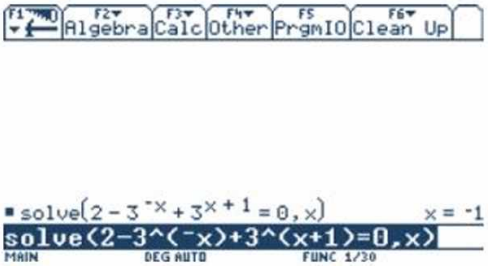


Figura 20

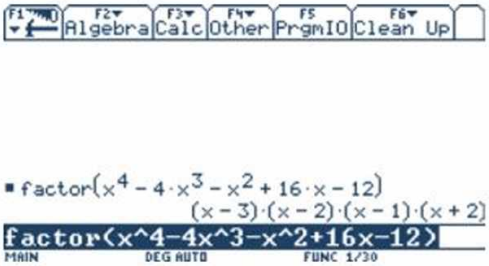


Figura 21

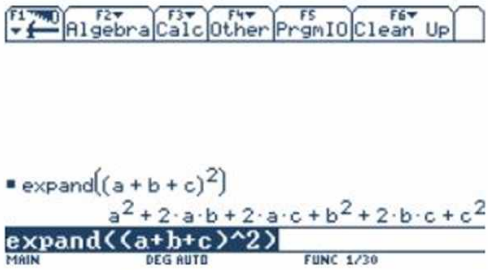


Figura 22

Para el bloque 7 es de gran utilidad conocer esta capacidad de manipulación simbólica y del uso de comandos del SAC, ya que es justo en estas actividades que se introduce el trabajo con las literales y las primeras reglas algebraicas.

www.FreeLibros.me

Producción de gráficas de funciones

Un SAC dispone de recursos para introducir una ecuación, así como desplegar y explorar gráficas y tablas. A continuación se ilustran estos procedimientos.

Editor de ecuaciones

En este editor es posible introducir ecuaciones para que con esa información el SAC construya sus gráficas. Es posible ingresar varias decenas de ecuaciones y recorrerlas una tras otra si se desea modificarlas o borrarlas. Para escribir una ecuación es necesario utilizar la letra *x*,; en caso de usar otra literal debe definirse mediante la asignación de un valor numérico.

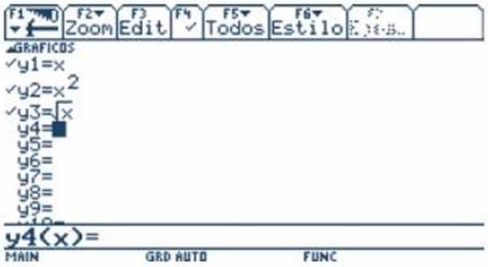


Figura 23

En la parte superior de la pantalla del editor hay herramientas para diversas acciones; por ejemplo, la asociada a F4 (una palomita) permite seleccionar o deseleccionar una ecuación para que su gráfica se despliegue o no; la asociada a F6 (Estilo) define el trazo de la gráfica (gruesa, con puntos, fina, etcétera).

Gráficas

En la pantalla para desplegar gráficas aparece el plano cartesiano y de inicio el origen está centrado. Las gráficas se despliegan en el orden de sus ecuaciones. Es posible navegar de una gráfica a otra utilizando la tecla del cursor.

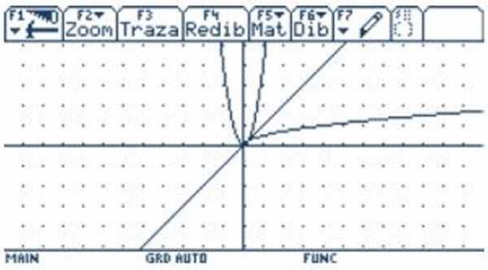


Figura 24

En la parte superior de la pantalla hay herramientas para diversas acciones con las gráficas; por ejemplo, la que está asociada a F4 (Redib) permite reiniciar la pantalla y observar la reconstrucción de cada una de las gráficas; en el caso de F5 (Mat), hay opciones para determinar los cruces entre dos gráficas, rectas tangentes en un punto dado, etcétera.

www.FreeLibros.me

Trace (Traza)

Esta herramienta asociada con F3 (Traza) permite recorrer las gráficas y desplegar las coordenadas de los puntos por los que pasa. En el caso de más de una gráfica, con la tecla del cursor es posible cambiar de una gráfica a otra y recorrer la seleccionada.

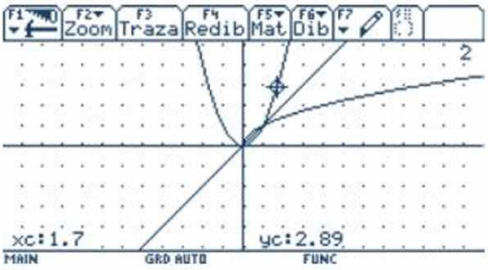


Figura 25

Al recorrer la gráfica no siempre es posible ubicarse en un punto deseado; para ello es necesario escribir el valor elegido para *x* y opimir ENTER, con lo cual el cursor se posiciona en dicho punto; por ejemplo, recorriendo la gráfica de la función raíz cuadrada e introduciendo el número 9; al accionar ENTER, el cursor se posiciona en el punto (9, 3).

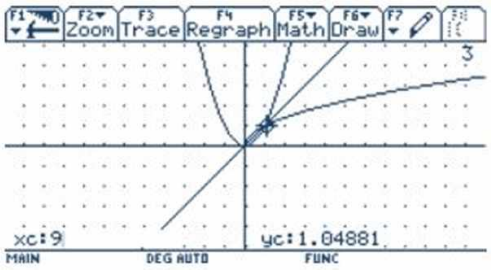


Figura 26

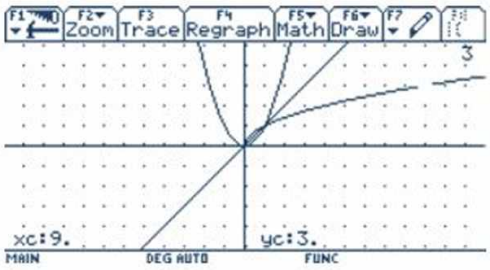


Figura 27

Zoom

El zoom realiza acercamientos y alejamientos en el plano cartesiano y está asociado a F2. Existen zoom predeterminados y otros que pueden ajustarse de acuerdo con las necesidades específicas, lo cual permite hacer exploraciones locales y globales de las gráficas.

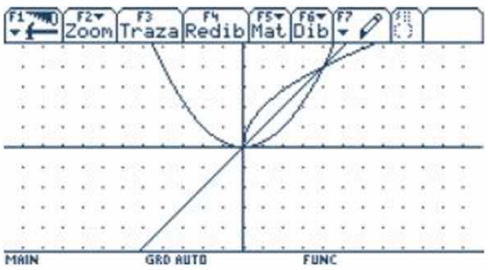


Figura 28

www.FreeLibros.me

Tablas de funciones

El SAC ofrece la posibilidad de mostrar las tablas que al igual que las gráficas corresponden a las ecuaciones introducidas. En ellas es posible recorrer los renglones y explorar los diferentes valores para *x* y sus imágenes. La herramienta asociada a F2 (Config) en la parte superior de la pantalla, permite modificar el valor de inicio de la tabla, el incremento de un renglón a otro, e incluso introducir en forma directa un valor para *x*.

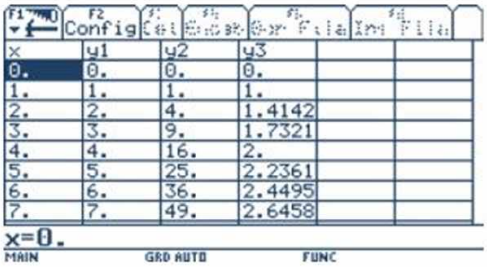


Figura 29

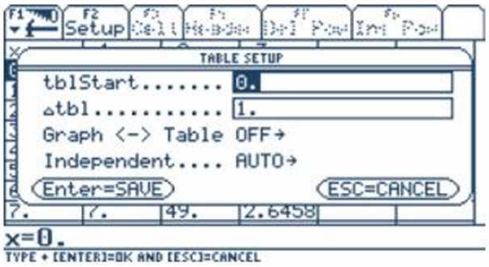


Figura 30

Para los tres últimos bloques de actividades es sumamente importante el conocimiento del ambiente gráfico del SAC. La siguiente tabla corresponde a la hoja de trabajo 70 y enseguida se ilustran la ecuación y la gráfica correspondientes, así como el uso de Trace.

Valor de entrada	Valor de salida
1.5	3
2.1	4.2
3.9	7.8
4.2	8.4

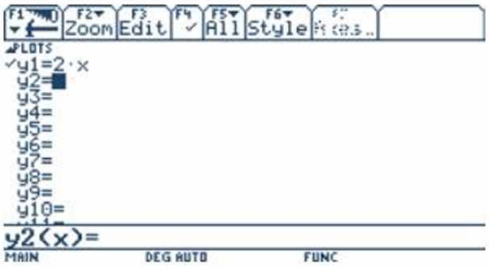


Figura 31

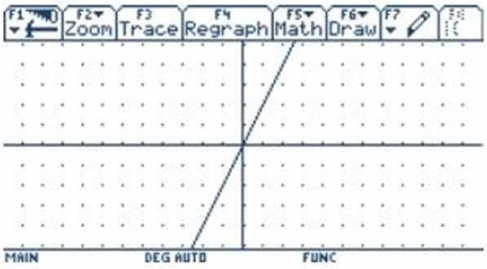


Figura 32

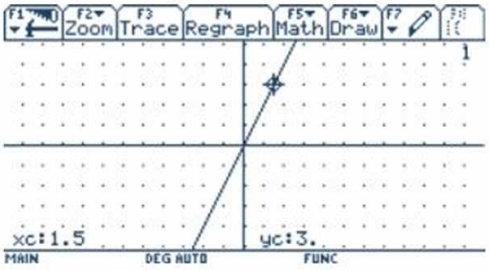


Figura 33

Un SAC dispone de un amplio repertorio de herramientas. Las que se presentaron en esta sección representan las mínimas necesarias para abordar las hojas de trabajo del texto. Es necesario que el lector continúe explorando el SAC que esté utilizando, para fortalecer sus destrezas en el uso de este recurso.

www.FreeLibros.me

Bloque 1

Operaciones y propiedades de los números naturales

El propósito de este primer bloque es el estudio de las operaciones y propiedades de los números naturales. La posibilidad de componer y descomponer los números facilita proponer actividades que permiten su estudio desde la perspectiva de que los números se generan a partir de otros. Encontrar múltiples formas de expresar un mismo número pone a la vista propiedades y reglas para operar con él.

Las actividades de este bloque parten de la premisa de que un aprendizaje sólido de los números y sus operaciones propiciará que el estudiante tenga más posibilidades de afrontar con éxito el aprendizaje de los conceptos y procedimientos del álgebra escolar.

A lo largo de las hojas de trabajo se presentan retos que hacen retomar lo que ya se sabe (dominio mecánico de las operaciones básicas y memorización de reglas). Una revisión de esos conocimientos promueve en los estudiantes un pensamiento flexible y creativo; superar esos retos mediante el esfuerzo personal da lugar al fortalecimiento de su autoestima, lo cual se refleja en una actitud positiva hacia las matemáticas.

Se pretende que la incorporación de la calculadora vaya más allá del hecho de aplicarla para realizar en poco tiempo una gran cantidad de operaciones. En este bloque de actividades y los demás que conforman este libro, la calculadora se propone como un instrumento que ofrezca un ambiente de manipulación simbólica para favorecer que los estudiantes pongan a prueba las conjeturas matemáticas que formulen. La retroalimentación inmediata que proporciona la calculadora les permite validarlas o, de otra manera, crear un conflicto cognoscitivo que los invite a reorganizar sus ideas.

Los contenidos aritméticos que se abordan en este bloque están fuertemente vinculados con los de la educación básica, por lo que este material ofrece oportunidades para analizar secuencias didácticas que conducirán a una serie de reflexiones útiles en la formación de los futuros docentes.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 1

Valor posicional

Escribe en la calculadora el número **796182453**. Supongamos que los nueve dígitos que forman ese número son "invasores espaciales". Para salvar al planeta debes "eliminarlos" uno por uno, convirtiéndolos en cero haciendo una sola operación con el número 796182453 y otro número que tú propongas. Por ejemplo, eliminar el "1" quiere decir que deberás hacer una operación para que el número 796**1**82453 cambie a 796**0**82453. Después de eliminar el 1 debes eliminar el 2; luego el 3, y así sucesivamente.

1. Completa la siguiente tabla para mostrar cómo eliminaste cada "invasor".

Dígito	Operación que hiciste en la calculadora	Resultado
1		796082453
2		796080453
3		796080450
4		796080050
5		796080000
6		790080000
7		90080000
8		90000000
9		0

2. Ahora elimina, uno por uno, cada dígito del número 4983.26715. Completa la siguiente tabla para mostrar cómo eliminaste cada "invasor".

Dígito	Operación que hiciste en la calculadora	Resultado
1		4983.26705
2		4983.06705
3		4980.06705
4		980.06705
5		980.067
6		980.007
7		980
8		900
9		0

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 2

Lectura y escritura de números

1. Escribe en la calculadora los números que están descritos con palabras. Conforme escribas los números efectúa con la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad, obtendrás el total que se indica; si tu resultado es diferente, busca y corrige el error. Cuando hayas producido los números correctos, escríbelos en el cuadro de la derecha.

Cantidades en palabras	Cantidades con números
a) siete millones setecientos ochenta mil cuatro, más ciento veinticinco mil cinco, más doce mil uno, más trescientos cuarenta y cinco mil ochenta y siete. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL:** 8262097
b) trece mil noventa y nueve más veinticinco millones ciento cinco, más ciento veintiocho millones ochenta y seis, más trescientos cinco mil uno. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL:** 153318291
c) cuatrocientos treinta y seis mil cien, más un millón dos mil, más quinientos mil veinte, más trescientos mil treinta. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL:** 2238150
d) diez millones uno, más dos millones cien, más treinta y siete mil uno, más quinientos cuarenta mil diez. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL:** 12577112

2. Inventa una suma como las anteriores, con cuatro sumandos. Usa números tan complicados como te sea posible. Verifica que el total que obtengas sea el mismo que el que se indica.

Cantidades en palabras	Cantidades con números
_____	_____
más _____	+ _____
más _____	+ _____
más _____	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL:** 4000136

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 3

Equivalencia numérica

1. Construye en cada recuadro una representación distinta del número quinientos nueve. **No puedes usar la tecla del 5 ni la del 9.** Trata de usar en cada una de tus respuestas **cuatro operaciones distintas**. Usa tu calculadora para comprobar tus respuestas.

2. Construye en cada recuadro el número trescientos doce. **Debes usar cuatro operaciones distintas y no puedes usar la tecla del 3 ni la del 1**. Encuentra tantas formas distintas como te sea posible y escríbelas en los siguientes espacios.

3. Construye en la calculadora el número mil doscientos veintidós. **Debes usar cuatro operaciones distintas y no puedes usar la tecla del 1 ni la del 2**. En cada recuadro escribe al menos dos representaciones distintas de ese número.

4. Construye en cada recuadro al menos una representación distinta del número cuatrocientos uno **sin usar la tecla del 4 ni la del 1**.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 4

¡Se descompuso la tecla para sumar!

El reto que presenta esta hoja de trabajo consiste en encontrar cómo realizar las siguientes sumas empleando la calculadora, pero sin usar la tecla para sumar

1. ¿Puedes hacer la operación 438 + 725 sin usar la tecla para sumar, y sin sumar mentalmente ni utilizar lápiz y papel? _____ Describe cómo lo hiciste. _____

_____

_____

_____

2. Compara tu método con el de los compañeros que estén cerca de ti. ¿Alguien encontró un método distinto del tuyo? _____ ¿En qué consiste? _____

_____

_____

_____

¿Cuál método es mejor: el tuyo o el de alguno de tus compañeros? _____

¿Por qué? _____

_____

_____

_____

3. ¿Puedes hacer la operación 1536 + 489 + 39.83, sin usar la tecla para sumar y sin sumar mentalmente ni emplear lápiz y papel? _____ Explica cómo lo hiciste, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

_____

_____

_____

4. Encuentra los números que faltan. Escribe en cada espacio las operaciones que hiciste.

a) $487 + x = 798$

b) $y + 1761 + 89 = 2346$

c) $7.4 + z + 125.97 = 784.88$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 5

¡Se descompuso la tecla para restar!

El reto que presenta esta hoja de trabajo consiste en encontrar una manera de restar usando la calculadora, pero sin utilizar en absoluto la tecla para restar.

1. ¿Puedes encontrar un método para hacer la operación 1585 – 427 sin usar la tecla para restar, y sin hacer la resta mentalmente ni utilizar lápiz y papel? _____

2. Explica qué método encontraste, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

_____

_____

_____

3. Compara tu método con el de los compañeros que estén cerca de ti. ¿Alguien encontró un método distinto del tuyo? _____ ¿En qué consiste ese otro método? _____

_____

_____

_____

4. ¿Cuál método es mejor: el tuyo o el de alguno de tus compañeros? _____
¿Por qué? _____

_____

_____

4. ¿Puedes hacer la operación 453.75 – 128.29 sin usar la tecla para restar, y sin hacer la resta mentalmente ni usar lápiz y papel? _____ Explica qué método encontraste; hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

_____

_____

_____

5. Encuentra los números que faltan. Escribe en cada espacio las operaciones que hiciste.

a) $x - 487 = 798$

b) $y - 1761 + 89 = 2346$

c) $z - 7.4 + 125.97 = 784.88$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 6

Del cero al cien con sólo cuatro "cuatros"

Una estudiante encontró que puede construir con la calculadora los números del cero al cien usando sólo cuatro veces el número 4 y las siguientes teclas:

Por ejemplo, el cero puede construirse como sigue: $4 \div 4 - 4 \div 4$. El 6 puede construirse así: $(4 \times 4) \div 4 + \sqrt{4}$. El 5 puede obtenerse como $(4 \times 4 + 4) \div 4$. Otra regla es que **no es válido escribir números** como 44 + 44

1. En la siguiente lista aparecen el 0 y el 5; encuentra otras formas de escribirlos. De la misma manera, trata de encontrar al menos dos formas distintas de escribir sólo con cuatro "cuatros" los demás números de la lista. Resuelve los casos que te parezcan muy difíciles usando más de cuatro "cuatros", y luego trata de hacerlo con cuatro "cuatros".

Núm.	Respuestas	Núm.	Respuestas	Núm.	Respuestas
0		27		58	
2		31		63	
3		35		64	
5		36		69	
9		40		75	
10		48		83	
13		49		89	
18		51		94	
22		52		100	

2. Un estudiante dice que $4 + 4 + 4 \div 4 = 3$. Otro de sus compañeros dice que eso no está bien, que el resultado correcto es 9. ¿Con quién estás de acuerdo? Justifica tu respuesta. _____

_____

_____

3. ¿Qué resultado produce la calculadora si realizas la operación $4 \div 4 + 4 \times 4$? _____

Explica por qué obtienes ese resultado con la calculadora. _____

_____

_____

4. Sin cambiar ninguna operación ni número alguno, ¿puedes "arreglar" la operación $4 + 4 + 4 \div 4$ para que dé como resultado 3? ¿Cómo lo harías? _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 7

¡Al cero en cinco pasos!

Esta hoja presenta un juego matemático con el siguiente planteamiento.

Se trata de reducir a cero un número que esté entre 0 y 1000. Puedes hacer esto mediante sumas, restas, multiplicaciones o divisiones; inclusive, puedes repetir una operación las veces que quieras.

Las operaciones deben hacerse con el número que se da y otro número entero que tú elijas. El número que elijas debe ser uno de los siguientes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 y puedes usarlo cuantas veces lo requieras.

Cada operación cuenta como un paso, y el resultado de cada operación debe ser un número entero.

Ganas el juego si, **en no más de cinco pasos**, puedes reducir a cero cada uno de los números que aparecen en la tabla.

Ejemplo: reducir a cero el número 869.

Paso 1:	$869 - 5 = 864$
Paso 2:	$864 \div 9 = 96$
Paso 3:	$96 \div 8 = 12$
Paso 4:	$12 \div 6 = 2$
Paso 5:	$2 - 2 = 0$

Usa la calculadora para encontrar alguna manera de reducir a cero los siguientes números:

a) 789	b) 629	c) 823
Paso 1:	Paso 1:	Paso 1:
Paso 2:	Paso 2:	Paso 2:
Paso 3:	Paso 3:	Paso 3:
Paso 4:	Paso 4:	Paso 4:
Paso 5:	Paso 5:	Paso 5:

a) 952	b) 997	c) 857
Paso 1:	Paso 1:	Paso 1:
Paso 2:	Paso 2:	Paso 2:
Paso 3:	Paso 3:	Paso 3:
Paso 4:	Paso 4:	Paso 4:
Paso 5:	Paso 5:	Paso 5:

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 8

¿Cuáles números dividen a otros?

Un estudiante dice que cualquier número entero, excepto el cero, puede dividirse entre sí mismo y entre el 1 sin dejar residuo.

1. ¿Es cierto eso? _____
   ¿Por qué? _____
2. Haz en tu calculadora la operación $5 \div 0$ y observa qué pasa. Comenta este resultado con tu profesor y tus compañeros, y anota tus conclusiones. _____
   _____
3. ¿Puedes encontrar un número entero que esté entre 50 y 60, y que sólo pueda dividirse entre sí mismo y entre el 1? ¿Cuál es ese número? _____
   _____
4. Una estudiante dice que encontró diez números enteros que están entre 80 y 120, los cuales sólo pueden dividirse entre sí mismos y entre el 1. ¿Es cierto eso? ¿Cuáles son esos números? _____
   _____
5. Otro estudiante dice que entre 120 y 130 no hay números que sólo puedan dividirse entre sí mismos y entre el 1 sin dejar residuo. ¿Es cierto lo que dice? _____
   ¿Por qué? _____
   _____
6. ¿Puedes encontrar cinco números que sólo se puedan dividir entre sí mismos, entre el 1 y otro número? _____ ¿Qué números con esas características encontraste? _____
7. ¿Puedes encontrar un método para inventar números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, entre el 1 y otro número? Describe tu método _____
   _____
8. Encuentra cinco números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, entre el 1 y otros dos números más. ¿Qué números encontraste? _____
   _____
9. ¿Puedes encontrar un método para inventar números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, entre el 1 y otros dos números? Describe tu método _____
   _____
10. ¿Puedes encontrar un método para construir números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, entre el 1 y otros tres números? Haz una lista de diez números con esas características. _____
    _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 9

¿Qué números se dividen entre 7 y 11?

Lee con atención lo siguiente:

10 es divisible entre 5 y entre 2 porque $5 \times 2 = 10$;
56 es divisible entre 7 y entre 8 porque $7 \times 8 = 56$.

1. Da otros tres ejemplos de números que sean divisibles entre 7. _____

2. Construye tres números enteros que estén entre 100 y 300, y que sean divisibles entre 7. Escribe los números que construiste. _____

3. Construye tres números enteros que estén entre 1000 y 1300, y que sean divisibles entre 7. Escribe los números que construiste. _____

4. Describe con un ejemplo cómo construiste números que son divisibles entre 7. Hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. _____

5. Construye tres números mayores que 200 y menores que 300 que sean divisibles entre 11. Escribe los números que construiste. _____

6. ¿Encontraste algún método para construir números que sean divisibles entre 11? Describe tu método con un ejemplo, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. _____

7. Encuentra un método para construir números que sean divisibles entre 11 y entre 13. Describe tu método usando dos ejemplos, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 10

¿Esos "numerotes" son divisibles entre todo eso?

Este es un juego matemático. Ganas el juego si puedes explicar por qué pasa lo que observarás enseguida.

1. Escribe un número entero de tres cifras, el que prefieras. _____

2. Repite ese número a continuación del que ya tienes. Tendrás entonces un número de seis cifras, en el que las tres primeras cifras son idénticas a las tres últimas. Por ejemplo, 324324. Escribe en el siguiente espacio el número que construiste. _____

3. ¿Crees que el número de seis cifras que construiste sea divisible entre 7? _____

   _____

   Comprueba tu respuesta y anota lo que observas. _____

   _____

4. ¿Crees que el número de seis cifras que construiste es divisible entre 11? _____
   Comprueba tu respuesta y anota lo que observas. _____

   _____

5. ¿Crees que el número de seis cifras que construiste sea divisible entre 13? _____
   Comprueba tu respuesta y anota lo que observas. _____

   _____

6. Analiza con tus compañeros lo que observaste. ¿Encontraron lo mismo que tú? _____
   ¿Cuáles son tus conclusiones? _____

   _____

   _____

   _____

7. Construye otros números de seis cifras, de manera que las tres primeras sean iguales a las tres últimas. ¿Esos números son divisibles entre 7, 11 y 13? _____
   ¿Qué hiciste para comprobar tu respuesta? _____

   _____

8. **Esta es la clave del juego**: si puedes dar una respuesta correcta a la siguiente pregunta habrás ganado. **¿Por qué cualquier número de seis cifras que construyas de esa manera siempre será divisible entre 7, 11 y 13?** Da tu respuesta de manera que cualquiera de tus compañeros la pueda entender. Tu profesor decidirá quién o quiénes son los ganadores en este juego. _____

   _____

   _____

   _____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. En la presentación del bloque se mencionan la *composición* y la *descomposición de los números para su estudio*. ¿De qué manera se refleja esto en las actividades? Identifica cinco ejemplos y coméntalos con tus compañeros.
2. ¿Consideras que las actividades del bloque representan retos que promueven el pensamiento reflexivo y creativo, y una actitud positiva hacia las matemáticas? Justifica ampliamente tu respuesta.
3. Analiza en forma detallada todas las hojas de trabajo y crea una lista de los contenidos matemáticos que abordan. Compara tu lista con las de tus compañeros, y por un cruce de información elabora con ellos una lista lo más completa posible.
4. En equipo, realicen una investigación en diferentes fuentes (Internet, libros de matemáticas, artículos, etc.) sobre los contenidos matemáticos de la lista anterior y preséntenla al grupo.
5. En equipo, elaboren un mapa conceptual que relacione los contenidos matemáticos de la lista que elaboraron en el punto 3.
6. Elabora un ensayo acerca del uso de la calculadora a partir de la experiencia que tuviste a lo largo de las hojas de trabajo de este bloque. En el ensayo analiza ventajas, desventajas, viabilidad, pertinencia, diferentes formas de usarla, etcétera.
7. Organiza en el grupo un debate acerca del uso de la calculadora, de acuerdo con los ensayos realizados, y redacta tus conclusiones.
8. Realiza lo que se indica a continuación:
   - Selecciona una de las hojas de trabajo para utilizarla con alumnos de educación básica y haz las adaptaciones que consideres necesarias. Preséntala a tus compañeros exponiendo la justificación de tu elección y las adecuaciones que hiciste. Toma nota de las observaciones que recibas y haz los ajustes del caso.
   - Haz una práctica con un grupo de educación básica para poner a prueba la hoja de trabajo del punto anterior. Obtén pruebas de los resultados.
   - Comparte tu experiencia de la práctica que hiciste con tus compañeros y haz de nuevo la hoja de trabajo, a partir de la retroalimentación que hayas recibido.

www.FreeLibros.me

Bloque 2

Números decimales: sus operaciones y propiedades

El propósito principal de este bloque es el estudio de las operaciones con números decimales y sus propiedades. De igual manera que los números naturales, los decimales pueden componerse y descomponerse. En las actividades de este bloque se aprovecha esta cualidad de los números para generar oportunidades de aprendizaje empleando las facilidades que brinda el procesador numérico de la calculadora científica.

La calculadora incluye herramientas para manipular los números decimales y favorece que se aborden con éxito las actividades del bloque. Sin gran dificultad pueden utilizarse números con diferentes cantidades de cifras decimales, y se aprovecha la retroalimentación inmediata que proporciona la máquina para propiciar que los estudiantes formulen y validen sus conjeturas o, en su caso, reestructuren sus formas de razonamiento.

Los contenidos matemáticos que se abordan en las hojas de trabajo están estrechamente relacionados con los propuestos para la educación básica. Se pretende que estas actividades promuevan el desarrollo de habilidades genéricas para el trabajo en la clase de matemáticas, como la exploración intuitiva, la formulación de conjeturas en el contexto de resolución de problemas, la elaboración de estrategias informales y formales, el uso de diferentes formas de representación para comunicar lo realizado, así como realizar estimaciones y aproximaciones.

Asimismo, el análisis didáctico de esta secuencia de actividades dará lugar a que los futuros docentes reflexionen sobre el aprendizaje y la enseñanza de los números decimales, y que les ofrezca oportunidades para profundizar en el conocimiento de estos temas.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 11

Suma y estimación

Escribe en cada inciso dos números tales que al sumarlos den el resultado que se indica.

0.321	0.457	1.305
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)
0.4056	**1.00506**	**3.040578**
j)	m)	o)
k)	n)	p)
l)	ñ)	q)

1. Describe el método que utilizaste para obtener los números que se piden en el inciso a, de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si lo deseas, hazlo con un ejemplo. _____

_____

_____

_____

_____

2. En cada inciso, encuentra tres números que al sumarlos den por resultado el número que se indica. Los números que uses en cada inciso deben ser distintos y ninguno de los sumandos debe ser cero. Usa la calculadora para comprobar tus respuestas. No debes tener ningún error.

0.7101	0.2003	0.3015
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 12

Resta y estimación

Escribe en cada inciso dos números tales que al restar uno del otro den por resultado el número que se indica.

0.425	**0.307**	**2.0056**
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)
0.509	**3.05608**	**19.50807**
j)	m)	o)
k)	n)	p)
l)	ñ)	q)

1. ¿Qué hiciste para encontrar los números que se piden en el inciso a? Describe tu método de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si lo deseas, hazlo con un ejemplo. _____

_____

_____

_____

_____

2. Encuentra los números que faltan en cada inciso. Escribe en cada espacio las operaciones que hagas para obtener tus respuestas. Usa la calculadora para comprobar tus respuestas; no debes tener ningún error.

a) $x - 0.01012 = 4.576$	b) $y - 0.10203 = 1.079$	c) $0.30076 - w = 3.45$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 13

Multiplicación y estimación

Escribe en cada inciso dos números tales que multiplicados den por resultado el número que se presenta. Los números que uses en cada inciso deben ser distintos.

0.001	0.206	0.765
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)
0.784	**3.519**	**19.873**
j)	m)	o)
k)	n)	p)
l)	ñ)	q)

1. Describe el método que utilizaste para encontrar los números que se piden en el inciso a, de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si lo deseas, hazlo con un ejemplo. _____

_____

_____

_____

_____

2. Escribe en cada inciso tres números tales que multiplicados den por resultado el número que se presenta.

0.1003	5.10207	7.30078
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 14

¡Se descompuso la tecla para multiplicar!

El trabajo que harás en esta hoja se basa en un juego, el cual consiste en encontrar una forma de multiplicar con la calculadora, **pero sin usar la tecla para multiplicar ni hacer de ninguna manera una multiplicación**.

1. ¿Puedes realizar la siguiente multiplicación sin usar la tecla para multiplicar y sin hacer mentalmente ninguna multiplicación, ni utilizar lápiz y papel?

84 × 37

2. Explica qué método encontraste, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

_____

_____

3. Compara tu método con el de los compañeros que estén cerca de ti. ¿Alguien encontró un método distinto del tuyo? _____

¿En qué consiste ese otro método? _____

_____

_____

_____

¿Cuál método es mejor: el tuyo o el de alguno de tus compañeros? _____

¿Por qué? _____

_____

4. ¿Puedes hacer la operación 95.8 × 36.5 sin usar la tecla para multiplicar y sin hacer la multiplicación mentalmente ni utilizar lápiz ni papel? _____

Explica cómo lo hiciste, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

_____

_____

_____

5. Encuentra los números que faltan. Escribe en cada espacio las operaciones que uses para obtener una solución. Comprueba tus respuestas usando la calculadora.

a) $48.7 \times d = 695.4$

b) $e \times 17.68 = 23.46$

c) $7048 \times z = 1.45$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 15

División y estimación

Escribe en cada inciso dos números tales que **al dividir uno entre el otro** den por resultado un número que esté **entre** los dos números que se presentan.

0.728 y 0.734	0.405 y 0.407	0.79 y 0.8
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)
0.791 y 0.792	**4.857 y 4.859**	**21.643 y 21.65**
j)	m)	o)
k)	n)	p)
l)	ñ)	q)

1. Describe el método que utilizaste para encontrar los números que se piden, de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si lo deseas, hazlo con un ejemplo._____

2. Encuentra el número que falta en cada uno de los siguientes incisos. Usa la calculadora para comprobar tus respuestas; no debes tener ningún error.

a) $r + 0.536 = 4.715$

$r =$ _____

b) $p + 0.318 = 0.0032$

$p =$ _____

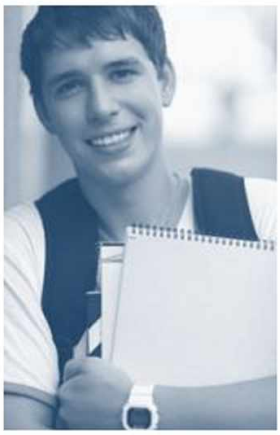
c) $1.267 + q = 100.412$

$q =$ _____

3. Si encontraste un método para solucionar el problema anterior, descríbelo mediante un ejemplo. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 16



¡Se descompuso la tecla para dividir!

El trabajo que harás en esta hoja se basa en un juego que consiste en encontrar una forma de hacer divisiones con la calculadora, **pero sin usar la tecla para dividir y sin hacer ninguna división.**

1. ¿Puedes hacer la operación 94 ÷ 28 sin usar la tecla para dividir y sin hacer la división mentalmente ni utilizar lápiz y papel? _____

Explica qué hiciste para contestar la pregunta anterior. Hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros la pueda entender. _____

_____

_____

2. Compara tu método con el de los compañeros que estén cerca de ti. ¿Alguien encontró un método distinto del tuyo? _____ ¿En qué consiste ese otro método? _____

_____

_____

_____

¿Cuál método es mejor: el tuyo o el de alguno de tus compañeros? _____

¿Por qué? _____

_____

3. ¿Puedes hacer la operación 96.8 ÷ 32.5 sin usar la tecla para dividir y sin hacer la división mentalmente ni utilizar lápiz y papel? _____ Explica qué método seguiste para resolver el problema, y hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. _____

_____

_____

_____

4. Encuentra el número que falta en cada uno de los siguientes incisos. Escribe en cada espacio las operaciones que hiciste para obtener tus respuestas y **compruébalas** con la calculadora.

a) $x + 0.125 = 1$

$x =$ _____

b) $y + 0.318 = 0$

$y =$ _____

c) $10 + z = 20$

$z =$ _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 17

Lectura y escritura de números decimales

Escribe en la calculadora los números que están descritos con palabras. Al mismo tiempo, efectúa, con la calculadora, las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica; de lo contrario, busca y corrige el error. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en el lado derecho.

Cantidades en palabras	Cantidades con números
a) un entero cuatro centésimos,	_____
más tres milésimos,	+ _____
más dos enteros setenta milésimos,	+ _____
más veinticinco milésimos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 3.138**
b) mil un enteros un centésimo,	_____
más dos mil noventa y nueve enteros diez centésimos,	+ _____
más cuarenta mil siete enteros un diezmilésimo,	+ _____
más veintitrés mil diez enteros diez milésimos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 66117.1201**
c) treinta y ocho mil veinte enteros veinte milésimos,	_____
más treinta mil tres enteros treinta y siete diezmilésimos,	+ _____
más cuarenta y dos mil treinta y un enteros treinta milésimos,	+ _____
más un entero dos milésimos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 110055.0557**
d) diez millones uno,	_____
más dos millones cien,	+ _____
más treinta y siete mil uno,	+ _____
más quinientos cuarenta mil diez.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 12577112**

1. Inventa una suma con cuatro sumandos como los anteriores. Usa números tan complicados como te sea posible. Verifica que el total que obtengas sea el mismo al que se indica.

Cantidades en palabras	Cantidades con números
_____ ,	_____
más _____ ,	+ _____
más _____ ,	+ _____
más _____ .	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 38001.036**

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 18

Lectura y escritura de medidas de longitud

1. Usa números decimales para escribir en la calculadora las medidas que están descritas con palabras. Al mismo tiempo que escribas los números, efectúa con la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica; pero si es diferente, busca y corrige el error. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en la columna de la derecha.

Medidas expresadas con palabras	Medidas expresadas con números
a) Un metro dos centímetros, más tres milímetros, más dos centímetros, más tres centímetros dos milímetros. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL: 1.075 metros**
b) Treinta metros cuarenta centímetros, más dos kilómetros veinticinco metros cuatro centímetros, más tres metros cuatro milímetros, más cuatro metros treinta y dos centímetros un milímetro. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL: 2062.765 metros**
c) Seis kilómetros ocho metros, más dos hectómetros cinco metros tres centímetros, más dos decámetros cuarenta y ocho milímetros, más veintiséis metros treinta y siete milímetros. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL: 6259.115 metros**
d) Cien kilómetros diez metros cuarenta y ocho centímetros, más cincuenta kilómetros dos metros nueve milímetros, más cuarenta y nueve kilómetros y medio, más dos kilómetros y medio, treinta y seis milímetros. **TOTAL:** _____	_____ + _____ + _____ + _____ **TOTAL: 202012.525 metros**

2. Inventa una suma con cuatro sumandos como las anteriores. Usa medidas de longitud tan complicadas como te sea posible. Verifica que el total que obtengas sea el mismo que el que se indica.

Medidas expresadas con palabras	Medidas con números
_____ ,	_____
más _____ ,	+ _____
más _____ ,	+ _____
más _____ .	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 38001.036 metros**

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 19

Lectura y escritura de medidas de peso

1. Usa números decimales para escribir en la calculadora las medidas que están descritas con palabras. Al mismo tiempo que escribas los números, efectúa con la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica; pero si es diferente, busca y corrige el error. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en la columna de la derecha.

Medidas expresadas con palabras	Medidas expresadas con números
a) Medio kilogramo,	_____
más cuarenta y siete gramos,	+ _____
más dos kilos ocho gramos,	+ _____
más cuarenta kilos veinticinco gramos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 42.58 kilos**
b) Dos toneladas doce kilos cuarenta gramos,	_____
más cien toneladas dieciséis kilos quinientos gramos,	+ _____
más dos mil treinta y siete gramos,	+ _____
más seis toneladas y media y doscientos gramos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 108530.777 kilos**
c) Dos kilos tres cuartos,	_____
más cuatro mil doscientos cincuenta gramos,	+ _____
más un kilo y un cuarto,	+ _____
más diez kilos cien gramos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 18.35 kilos**
d) Cuatro toneladas tres cuartos,	_____
más veintiocho toneladas un cuarto,	+ _____
más quince toneladas dos kilos,	+ _____
más siete mil cinco gramos.	+ _____
TOTAL: _____	**TOTAL: 48009.005 kilos**

2. Inventa una suma con cuatro sumandos como las anteriores. Usa números tan complicados como te sea posible. Verifica que el total que obtengas sea el mismo que el que se indica. Si no te da ese resultado revisa tus respuestas y corrige los errores.

Medidas expresadas con palabras	Medidas con números
_____ ,	_____
más _____ ,	+ _____
más _____ ,	+ _____
más _____ .	+ _____
TOTAL: _____	**SUMA: 43806.02 kilos**

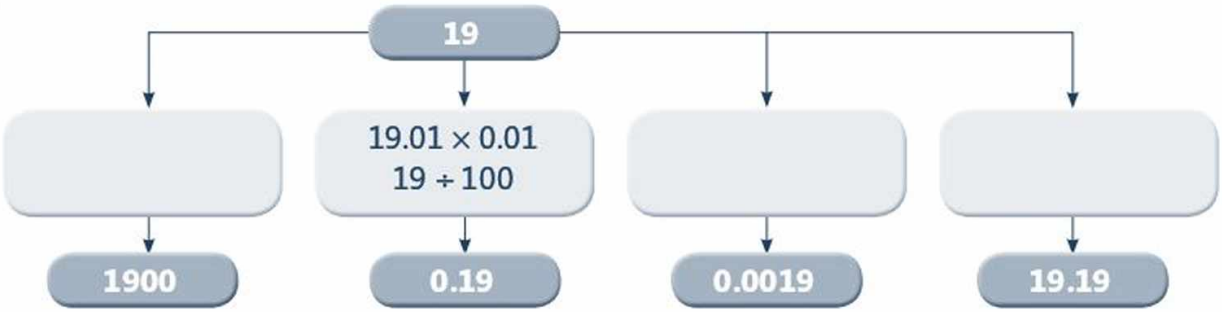
www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 20

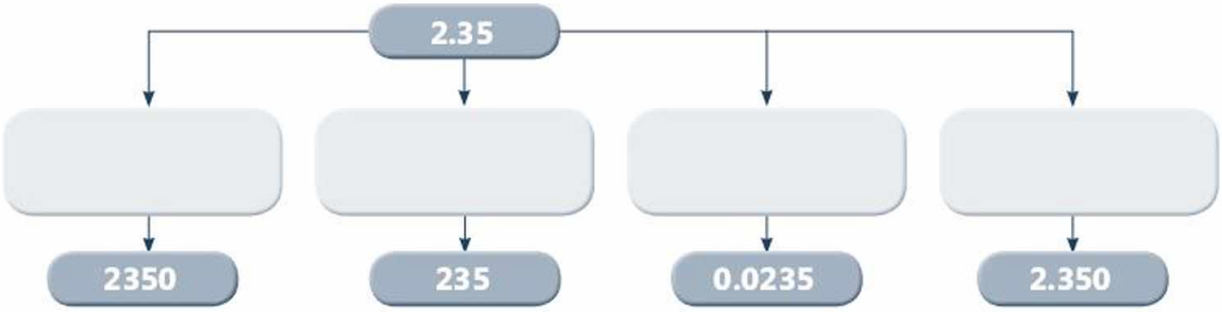
Transformaciones en un solo paso

Encuentra **al menos** dos formas para obtener los números que están debajo de los recuadros a partir del número que está arriba. Anota en los recuadros las operaciones que realizaste.

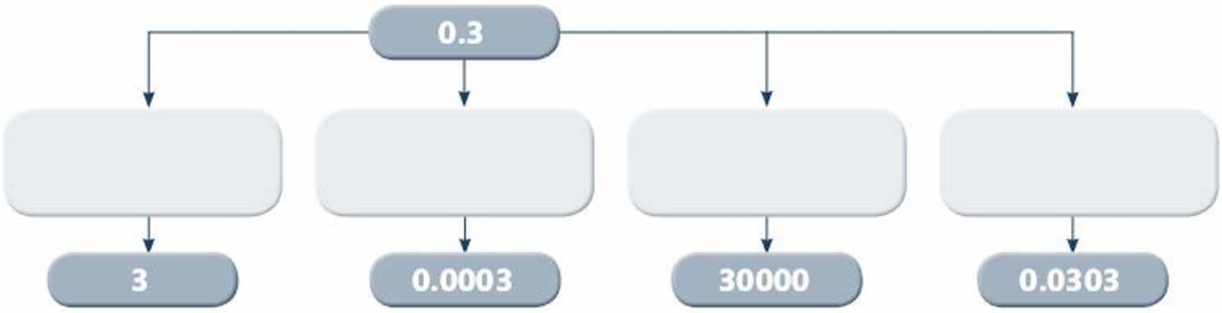
1.



2.



3.



4. Una estudiante dice que 1.5 es igual 1.5000. ¿Tiene razón? _____

¿Por qué? _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 21

¡Se descompuso la tecla del punto decimal!

Supongamos que la tecla del punto decimal se ha descompuesto. Encuentra **al menos dos maneras distintas** de producir con la calculadora cada uno de los siguientes números **sin usar la tecla del punto decimal**. Escribe en cada recuadro lo que hiciste en la calculadora para obtener lo que se indica.

a) 0.5	b) 1.5	c) 0.3
d) 23.4	e) 10.1	f) 1342.58
g) 19876.035	h) 10003.002	i) 0.00034
j) 3333.333	k) 0.02	l) 3.25

1. Compara tu trabajo con el de tus compañeros. ¿Utilizaron los mismos métodos? _____

¿En qué se parecen y en qué son distintos? _____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 22

Fracciones decimales

La siguiente figura es una tira de papel y representa una unidad, que ha sido dividida en varias partes.

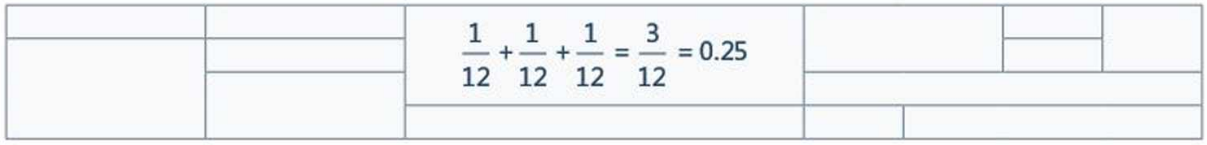
1. Escribe dentro de cada cuadro el número de la parte decimal que represente.

2. Suma los números que escribiste en cada parte. **Si tus respuestas son correctas, la suma total debe darte 1.** ¿La suma que hiciste te dio 1? _____ Si no fue así, encuentra los errores e inténtalo de nuevo.

3. En la siguiente figura, ¿qué fracciones decimales corresponden a cada una de las partes en que se ha dividido la unidad?

4. Suma los números que escribiste _____. **Si tus respuestas son correctas, la suma debe darte 1.** ¿La suma que hiciste te dio 1? _____
Si no fue así, encuentra los errores e inténtalo de nuevo.

5. ¿Qué fracciones corresponden a cada una de las partes en que se ha dividido la unidad en la siguiente figura? Escribe en cada parte la fracción común y la fracción decimal que la represente.



6. ¿Puedes asegurar que tus respuestas son correctas? ¿Por qué? _____

_____

_____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. Escribe un ensayo en el que se incluyan las reflexiones que te fuiste formulando al realizar las actividades de este bloque.
2. Haz propuestas para enriquecer las actividades de este bloque.
3. Forma un equipo de trabajo para elaborar una lista de los contenidos matemáticos incluidos en las hojas de trabajo.
4. En equipo, diseña un mapa conceptual que relacione los contenidos matemáticos que enunciaste en el punto anterior.
5. Elabora una tabla que relacione los contenidos matemáticos que abordan las hojas de trabajo del bloque con los de la educación básica.
6. Realiza lo que se indica a continuación:
   - Selecciona un contenido de la tabla anterior y las hojas de trabajo que lo abordan.
   - En caso necesario, realiza ajustes en las hojas de trabajo para utilizarlas con estudiantes de educación básica.
   - Lleva a cabo una práctica en el aula utilizando las hojas de trabajo con un grupo de educación básica.
   - Registra lo sucedido en la práctica.
   - Haz los ajustes necesarios a las hojas de trabajo a partir de la retroalimentación que obtuviste al emplearlas en la práctica docente.
   - Presenta a tus compañeros los resultados de tu práctica.
7. Lleva a cabo una investigación acerca de los números decimales, acudiendo a distintas fuentes, y realiza una presentación.

www.FreeLibros.me

Bloque 3

Fracciones comunes

El propósito central de este bloque es el estudio de las fracciones comunes, sus operaciones y propiedades. En las actividades que aquí se incluyen se trata la construcción de las fracciones a partir de fracciones con numerador 1 (fracciones unitarias), lo cual facilita componerlas y descomponerlas en diferentes maneras y expresarlas mediante fracciones equivalentes.

En las actividades se abordan las fracciones trabajando con la pareja de números que las conforman; la descomposición del numerador produce fracciones de una misma clase, la transformación del numerador y el denominador genera fracciones equivalentes y a su expresión decimal, y todo este conjunto prepara la introducción a las operaciones de suma y resta.

El uso de la calculadora permite disponer de un ambiente de trabajo matemático para la labor de exploración con las fracciones, ya que retroalimenta de manera permanente el trabajo que se hace en la máquina, favoreciendo la reflexión y reorganización de ideas.

Desde esta perspectiva, el estudio de las fracciones pretende generar un aprendizaje con significados, lo cual es un apoyo crucial para que los estudiantes no aprendan procedimientos estrictamente mecánicos. El significado inicial que se induce en estas actividades para las fracciones es el de "números que expresan cantidad y tamaño".

Los contenidos y habilidades matemáticas del bloque están estrechamente relacionados con los que propone la educación básica, lo cual permite que las actividades de este bloque sean un material de utilidad para los futuros docentes, y nuestra mayor expectativa es que logren un alto grado de comprensión de los saberes que en su momento deberán promover con sus estudiantes.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 23

Noción de fracción

La figura de abajo representa una tira de papel que se ha dividido en algunas partes. La tira completa representa la unidad.

1. Escribe en cada parte la fracción que representa.

				$\frac{1}{8}$			

2. ¿Cuánto te dio la suma de todas las fracciones? _____.

Si tus respuestas son correctas la suma debe darte 1.

¿La suma que hiciste te dio 1? _____

Si no fue así, encuentra los errores e inténtalo de nuevo.

3. ¿Qué fracciones corresponden a cada una de las partes en que se ha dividido la tira de papel que se muestra en la siguiente figura? Escribe en cada parte la fracción correspondiente.

			$\frac{1}{9}$						

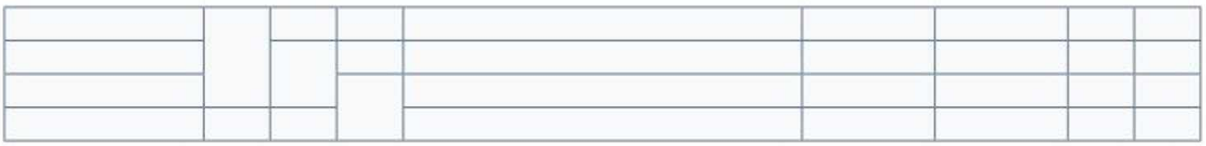
4. ¿Cuánto te dio la suma de todas las fracciones? _____

Si tus respuestas son correctas la suma debe darte 1.

¿La suma que hiciste te dio 1? _____

Si no fue así, encuentra el error e inténtalo de nuevo.

5. ¿Qué fracciones corresponden a cada una de las partes en que se ha dividido la tira de papel que se muestra en la siguiente figura? Escribe en cada parte la fracción que corresponda.



6. ¿Cómo puedes usar la calculadora para verificar que tus respuestas son correctas?_____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 24

Fracciones equivalentes

1. Usa la calculadora para realizar las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{8}+\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{10}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$

e) $\frac{8}{16}+\frac{1}{3}$ f) $\frac{2}{4}+\frac{1}{3}$ g) $\frac{7}{14}+\frac{1}{3}=$ h) $\frac{16}{32}+\frac{1}{3}$

2 ¿Qué observas? _____

¿Por qué crees que esté pasando eso? _____

3. Ahora elabora otras cinco operaciones que den el mismo resultado que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

a)	b)	c)	d)	e)

4. Construye en cada inciso tres fracciones equivalentes a la fracción que se presenta.

a) $\frac{2}{3}$	b) $\frac{3}{4}$	c) $\frac{2}{9}$	d) $\frac{4}{20}$	e) $\frac{3}{15}$

5. Encuentra fracciones equivalentes a las fracciones que se muestran en cada inciso. Esas fracciones deben cumplir la condición de tener **el mismo denominador**. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$ se pueden expresar como sigue: $\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$ y $\frac{1}{5}=\frac{4}{20}$.

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{8}$	b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$	c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$	d) $\frac{5}{6}$ y 2	e) 5 y $\frac{1}{3}$

6. Describe detalladamente el método que utilizaste para encontrar las fracciones equivalentes con igual denominador del inciso anterior. _____

_____

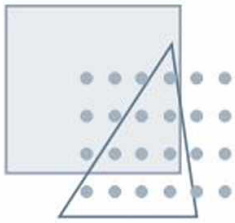
_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 25

Fracciones y razones



Observa la figura de la derecha para contestar lo que se indica en cada inciso.

1. ¿Cuál fracción corresponde a la cantidad de puntos que están totalmente dentro del triángulo respecto al total de puntos que aparecen en la figura? _____

_____

2. ¿Cuál fracción representa la cantidad de puntos que están dentro del cuadrado con respecto al total de puntos que hay en la figura? _____

_____

3. Algunos puntos se encuentran en la parte en que se empalman el cuadrado y el triángulo. ¿Cuál fracción representa esa cantidad de puntos con respecto al total de puntos que hay en la figura? _____

_____

4. ¿Qué fracción corresponde a los puntos que están afuera del triángulo, pero dentro del cuadrado, como parte del total de puntos que hay en la figura? _____

5. Una estudiante dice que las siguientes fracciones son equivalentes. **Usa la calculadora para revisar sus respuestas y corrige las que sean erróneas.** Escribe en cada cuadro las operaciones que usaste para comprobar.

a) $\frac{60}{72} = \frac{55}{67}$	b) $\frac{27}{45} = \frac{3}{5}$	c) $\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$
d) $\frac{0}{68} = 0$	e) $\frac{84}{91} = \frac{12}{13}$	f) $\frac{630}{2520} = \frac{530}{2420}$

6. El profesor González y el profesor Pérez aplicaron el mismo examen a sus respectivos grupos. En el grupo del profesor González, 20 de 25 estudiantes aprobaron el examen, y en el grupo del profesor Pérez, lo aprobaron 24 de 30 estudiantes. Uno de los estudiantes se enteró de dichos resultados y afirma que ambos grupos obtuvieron la misma tasa de resultados. ¿Es correcto lo que dice ese estudiante? Justifica tu respuesta. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 26

Fracciones como operadores

1. Una estudiante dice que para obtener la mitad de 1784 es lo mismo hacer la operación $1784 \div 2$, que la de $1784 \times \frac{1}{2}$. ¿Estás de acuerdo? _____
Si tu respuesta es afirmativa di por qué. Si no, demuéstralo con un ejemplo.

_____

_____

_____

2. Un estudiante dice que para obtener la tercera parte de 891 es lo mismo dividir entre 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$. ¿Estás de acuerdo? _____
Si tu respuesta es afirmativa di por qué. Si no, demuéstralo con un ejemplo.

_____

_____

3. Otro estudiante dice que para sacar dos quintas partes de 340 puede hacer cualquiera de estas dos operaciones: $340 \times \frac{2}{5}$ o $\frac{340 \times 2}{5}$. ¿Estás de acuerdo? _____ Si tu respuesta es afirmativa di por qué. Si no, demuéstralo con un ejemplo. _____

_____

4. Usa fracciones para encontrar lo que se pide en cada caso. Escribe las operaciones en los espacios correspondientes.

a) La onceava parte de 6457.	b) La quinceava parte de 11040.	c) Un quinto de 195.	d) Dos décimos de 7830.
e) Tres veinteavos de 11740.	f) Cuatro quintas partes de 350.	g) Ocho séptimos de 4109.	h) Siete novenos de 3708.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 27

¿Cuáles fracciones faltan?

1. Usa la calculadora para encontrar las fracciones que faltan.

a) $\frac{2}{5} + a = 1$

La fracción que falta es: _____

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + c = 1$

La fracción que falta es: _____

c) $\frac{1}{7} + \frac{1}{4} + f = 1$

$f =$ _____

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + h = 2$

$h =$ _____

e) $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{6} + p = 10$

$p =$ _____

f) $1\frac{2}{5} + 2\frac{3}{4} + m + 3\frac{1}{6} = 11\frac{1}{2}$

$m =$ _____

2. ¿Qué hiciste para resolver lo anterior? _____

_____

_____

_____

3. Usa la calculadora para encontrar las fracciones que faltan.

a) $\frac{2}{3} - x = \frac{1}{5}$

La fracción que falta es: _____

b) $\frac{3}{4} - y = \frac{3}{8}$

La fracción que falta es: _____

c) $3 - m = \frac{3}{7}$

La fracción que falta es: _____

d) $\frac{5}{8} - a = \frac{1}{5}$

La fracción que falta es: _____

e) $\frac{27}{4} - q = 6$

La fracción que falta es: _____

f) $\frac{1}{3} - b - c = \frac{1}{4}$

La fracción que falta es: _____

4. ¿Encontraste un método para resolver lo anterior? _____

Descríbelo. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 28

¿Cómo encuentro esas fracciones?

1. Escribe en cada inciso dos fracciones cuya suma dé como resultado $\frac{3}{4}$.

a) b) c) d) e)

2. Escribe en cada inciso tres fracciones cuya suma den como resultado $\frac{3}{8}$.

a) b) c) d)

3. Escribe en cada inciso tres fracciones que al sumarlas den como resultado $\frac{25}{3}$.

a) b) c) d)

4. Escribe en cada inciso tres fracciones que al sumarlas den como resultado $3\frac{4}{5}$.

a) b) c) d)

5. Escribe en cada inciso tres fracciones que al sumarlas den como resultado $\frac{1}{12}$.

a) b) c) d)

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 29

Un poco de fracciones y restas

1. Escribe en cada inciso dos fracciones de manera que al restar una de la otra obtengas $\frac{2}{5}$.

a) b) c) d) e)

2. Escribe en cada inciso dos fracciones de manera que al restar una de la otra obtengas $\frac{2}{7}$.

a) b) c) d)

3. Escribe en cada inciso dos fracciones de manera que al restar una de la otra dé como resultado $3\frac{1}{3}$.

a) b) c) d)

4. Encuentra las fracciones que faltan.

a) $\frac{4}{5} - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{10}$ b) $\frac{3}{7} - \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{1}{24}$ c) $\frac{27}{8} - \frac{d}{f} - \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{8} - \frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12}$

5. Un pasajero inició su jornada, y justo a la mitad del viaje se quedó dormido. Al despertar se dio cuenta que aún le faltaba por viajar la mitad de la distancia que había recorrido mientras dormía. ¿Qué parte de toda la jornada permaneció dormido? _____

6. Escribe las operaciones que hiciste para obtener ese resultado. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 30

¡Qué fácil es multiplicar con fracciones!

1. Realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} =$ b) $\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} =$ c) $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} =$ d) $\frac{2}{9} \times \frac{5}{11} =$

2. Observa los resultados que obtuviste. ¿Qué operaciones crees que hizo la calculadora con esos números para realizar las multiplicaciones anteriores? _____

_____

_____

3. Encuentra las fracciones que faltan.

a) $\frac{1}{3} \times \frac{a}{b} = 1$ b) $\frac{3}{4} \times \frac{c}{d} = 1$ c) $\frac{7}{8} \times \frac{d}{f} = 1$ d) $7 \times \frac{p}{q} = 1$

e) $\frac{2}{5} \times \frac{r}{s} = 1$ f) $\frac{9}{10} \times \frac{m}{n} = 1$ g) $\frac{5}{7} \times \frac{x}{y} = 1$ h) $12 \times \frac{y}{z} = 1$

4. Una estudiante dice que la operación $\frac{4}{5} \times \frac{3}{3}$ le permite construir una fracción equivalente a $\frac{4}{5}$ ¿Es cierto lo que dice? _____ ¿Si multiplicara $\frac{4}{5}$ por $\frac{6}{6}$ también obtendría una fracción equivalente? _____ Justifica tu respuesta. _____

_____

_____

5. De las siguientes fracciones encierra en un círculo las que sean equivalentes a $\frac{8}{24}$.

a) $\frac{8}{12}$ b) $\frac{4}{12}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{16}{24}$

e) $\frac{40}{120}$ f) $\frac{48}{72}$ g) $\frac{4}{6}$ h) $\frac{32}{60}$

6. Describe detalladamente el método que utilizaste para resolver el problema anterior. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 31

¿Cuál fracción es mayor?

1. En cada inciso, encierra en un círculo el número que creas que sea el mayor.

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ y $\frac{4}{9}$ c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{4}$ d) $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ e) $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$

f) $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{6}$ g) $\frac{11}{12}$ y $\frac{7}{8}$ h) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ i) $\frac{5}{8}$ y $\frac{5}{9}$ j) $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$

2. ¿Cómo podrías usar la calculadora para verificar si las respuestas del ejercicio 1 son correctas? Describe el método que utilizaste. _____

_____

_____

3. Una estudiante dice que para saber cuál es el número mayor resta uno de los números del otro, pero que a veces le da un número negativo y se confunde. Por ejemplo, $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}$. ¿Cuál es el número mayor en este caso? _____ ¿Por qué? _____

4. Otro estudiante dice que él no usó la calculadora, y que sólo trabajó con fracciones equivalentes. Por ejemplo, para comparar $\frac{4}{5}$ con $\frac{5}{6}$, él las transformó en $\frac{24}{30}$ y $\frac{25}{30}$ respectivamente. ¿Puedes explicar qué hizo después para decidir cuál era la fracción mayor? _____

_____

5. Ordena de mayor a menor los números que se muestran en cada inciso.

a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{5}{8}$ b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{8}{10}$ d) $\frac{11}{5}, \frac{12}{6}, \frac{13}{8}, \frac{13}{6}, \frac{18}{9}$

¿Qué método empleaste para encontrar la solución? _____

_____

_____

6. Encuentra en cada caso una fracción que esté **entre** las dos fracciones que se presentan.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$

e) $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ f) $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$ g) $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$ h) $\frac{11}{24}$ y $\frac{12}{24}$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 32

¿Qué fracciones dan la suma mayor?

1. Hay once fracciones distintas a $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ que pueden construirse con los números 3, 4, 5 y 6. ¿Cuáles son esas fracciones?

_____

_____

(observa que $\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=1$).

a) ¿Cuál de las parejas de fracciones que construiste produce la suma menor? _____

b) ¿Cuál es la pareja cuya suma es mayor?

_____

_____

2. Forma las trece fracciones distintas que pueden construirse con los números 2, 3, 6, 8. Escríbelas en el espacio de abajo.

a) **Sin hacer las sumas**, indica cuál es la pareja que crees que dará la suma menor.

_____

b) **Sin hacer las sumas** indica cuál es la pareja que crees que dará la suma mayor.

_____

3. ¿Cuáles son las fracciones distintas que pueden construirse con los números 2, 3, 6 y 8?

_____

_____

a) **Sin hacer las sumas**, indica cuál es la pareja que crees que dará la suma menor.

_____

b) **Sin hacer las sumas** indica cuál es la pareja que crees que dará la suma mayor. _____

_____

_____

4. Ahora elige cuatro números enteros y forma las fracciones que se pueden construir con ellos. Escribe esas fracciones en el espacio de abajo.

a) **Sin hacer las sumas**, indica cuál es la pareja que crees que dará la suma menor. _____

b) **Sin hacer las sumas**, indica cuál es la pareja que crees que dará la suma mayor. _____

5. Elige cuatro de los números 9, 10, 13, 14, 15 y 26, de manera que con ellos se formen las dos fracciones cuya suma sea la menor posible. ¿Cuáles son esas dos fracciones? _____

_____

6. ¿Encontraste un método para saber cuál pareja o terna de fracciones dará la suma mayor y cuál dará la suma menor? Describe tu método de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. En la presentación de este bloque se menciona que el significado que se induce para las fracciones comunes es el de "números que expresan cantidad y tamaño". Analiza con tus compañeros y tu profesor este significado y haz un resumen con tus propias conclusiones.
2. Identifica los contenidos matemáticos que se incluyen de manera explícita e implícita en las hojas de trabajo del bloque.
3. Elabora una tabla que relacione los contenidos de las hojas de trabajo del punto anterior con los de la educación básica.
4. En la presentación se hace referencia a las fracciones unitarias para producir fracciones de una misma clase como parte importante para desarrollar el trabajo con las fracciones. Analiza en grupo a qué se refiere esto e identifica en las hojas de trabajo ejemplos que lo ilustren.
5. Analiza con tus compañeros el rol de la calculadora en las actividades de este bloque y elabora un breve ensayo al respecto.
6. Realiza lo que se indica a continuación:
   - Encuentra artículos de investigación que reporten las diferentes dificultades que han sido detectadas en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y elabora un reporte al respecto. Preséntalo a tus compañeros.
   - Selecciona una o más hojas de trabajo de este bloque para abordar alguna de las dificultades investigadas en el inciso anterior. En caso necesario, haz los ajustes necesarios a las hojas de trabajo. Justifica la selección y modificaciones hechas.
   - Efectúa una práctica con estudiantes de educación básica para poner a prueba las hojas de trabajo que seleccionaste en el punto anterior y haz un registro de lo sucedido.
   - Comparte con tus compañeros lo llevado a cabo en la práctica y considera sus observaciones para realizar ajustes en tu plan de clase.
7. Haz una investigación sobre los números racionales, elabora una presentación y compártela con tus compañeros.

www.FreeLibros.me

BLOQUE 4

Números con signo y sus operaciones

El propósito de este bloque es introducir el estudio de los números con signo. En diversas situaciones de la vida cotidiana se usan los números negativos, y a lo largo de las actividades de este bloque se presentan este tipo de situaciones y se introducen las reglas para operar con números positivos y negativos, aprovechando los recursos que ofrece el procesador numérico de un sistema algebraico computarizado (CAS).

El uso de la calculadora en la propuesta didáctica de este bloque es central, y gran parte de las actividades que aquí se proponen están orientadas al "descubrimiento" de las reglas para operar números con signo a partir de los resultados de la máquina.

En las actividades se incluyen preguntas cuya función es evitar que la calculadora se emplee como una "caja negra". Tales preguntas conducen a los estudiantes a descubrir las reglas matemáticas que aplica la máquina para operar aritméticamente e identificar los procedimientos propios de las operaciones con números positivos y negativos. En las hojas de trabajo se plantean una o más variantes que apoyan la identificación de reglas para trabajar números con signo y se busca evitar la generación de reglas erróneas.

El trabajo de este bloque pretende propiciar la formulación de conjeturas y promover el desarrollo y dominio de técnicas para la operatividad aritmética, destrezas que son necesarias en la formación matemática de los estudiantes y que están en consonancia con lo propuesto para la educación básica.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 33

¿Cómo sumamos números con signo?

En estas hojas de trabajo aprenderás aspectos importantes acerca de los números, los cuales pueden ser **positivos o negativos; el cero no es positivo ni negativo**. Ya conoces bien los números positivos.

Los números negativos son muy importantes en matemáticas, además son útiles en muchas situaciones. Por ejemplo, la temperatura "siete grados bajo cero" puede representarse mediante la expresión **–7 grados**. La Fosa de las Marianas es la fosa marina más profunda que se conoce y el lugar más profundo de la corteza terrestre, con 11 022 metros bajo el nivel del mar, lo cual puede representarse como –11 022 metros. Los números negativos también se usan para referirse a deudas; por ejemplo, si una persona debe $1 000.00, esa deuda puede representarse mediante la expresión **–1 000 pesos** (se lee "menos mil pesos").

1. Encuentra otras situaciones en las que puedan usarse los números negativos. _____

_____

_____

2. Usa la calculadora para realizar las siguientes operaciones. Observa que en la calculadora hay dos signos que representan "menos". Uno de ellos sirve para efectuar la operación de restar, el otro, el signo (–), es el que debes usar para indicar que un número es negativo cuando vas a emplear la calculadora.

a) –7 + 9 = b) –5 + –7 = c) 8 + –7 = d) –15 + –17 =

e) –30 + –50= f) 0.5 + –2 = g) –19 + –30 = h) –72 + 30 =

3. ¿Qué operaciones hizo la calculadora para sumar un número negativo con un número positivo? _____

_____

_____

4. ¿Qué operaciones hizo la calculadora para sumar un número negativo con otro número negativo? _____

_____

_____

5. ¿Qué hace la calculadora para saber qué signo le pone al resultado de esas operaciones? _____

_____

_____

6. Encuentra tres parejas de números que al sumarlos den el resultado que se indica. Verifica tus respuestas usando la calculadora.

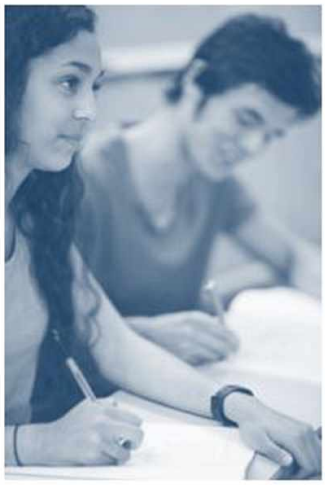
a) Resultado: –32 b) Resultado: –45 c) Resultado: –27 d) Resultado: –40

e) Resultado: –55 f) Resultado: –78 g) Resultado: 0 h) Resultado: –1

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 34

Algo más sobre suma de números con signo



1. Encuentra tres números que al sumarlos den por resultado cero. Escríbelos aquí. _____

2. Encuentra cuatro números que al sumarlos den por resultado –1. Escríbelos aquí. _____

3. Encuentra cinco números que al sumarlos den por resultado –27. Escríbelos aquí. _____

4. Construye una suma con tres sumandos de manera que el resultado sea –0.25. _____

5. Construye una suma con cuatro sumandos, dos positivos y dos negativos, de manera que el resultado sea –0.763. _____

8. Encuentra los números que faltan. Verifica tus respuestas con la calculadora; no debe haber ningún error.

a) $-15 + 13 + m = 0$ $m =$	b) $17 + -20 + n = -75$ $n =$	c) $p + 18 + -35 = -100$ $p =$
d) $-2.5 + q + -12 = 7.8$ $q =$	e) $\frac{1}{3} + r + -\frac{1}{9} = -2$ $r =$	f) $-\frac{1}{5} + s + \frac{3}{8} = 0$ $s =$
g) $-1.3 + t + -2.4 = -10$ $t =$	h) $7.45 + -12.8 + u = 15$ $u =$	i) $-v + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = 0$ $v =$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 35

¿Cómo restamos números con signo?

También podemos hacer restas con números negativos. Por ejemplo, haz en tu calculadora la siguiente operación **9 – –8**.

Observa que el primer signo "menos" (–) es el que se usa para restar, y que el segundo signo "menos" (–) es el que se usa para introducir números negativos en la calculadora.

1. ¿Qué resultado da la calculadora cuando haces la operación 9 – –8? _____

¿Por qué crees que se obtiene ese resultado? _____

2. Introduce en la calculadora la expresión **10 – –6** y luego presiona la tecla "=", **"ENTER"** o **"EXE"**, según corresponda. ¿Qué resultado da la calculadora? _____

¿Qué crees que hace la calculadora cuando introduces, uno luego del otro, los dos signos para la expresión "menos"? _____

3. Realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $9 - -10 =$	b) $14 - -14 =$	c) $\frac{1}{2} - -\frac{1}{2} =$
d) $\frac{1}{3} - -\frac{1}{3} =$	e) $-18 - -14 =$	f) $-100 - -48 =$

4. Explica lo que crees que hace la calculadora para restar un número negativo. _____

_____

5. Encuentra el número que falta. Usa la calculadora para verificar tus respuestas.

a) $4 - a = 10$ $a =$	b) $-\frac{1}{2} - b = \frac{3}{4}$ $b =$	c) $-\frac{1}{3} - c = \frac{1}{2}$ $c =$
d) $-18 - d = 20$ $d =$	e) $-40 - e = 50$ $e =$	f) $16 - f = 40$ $f =$
g) $-17.5 - g = -19.4$ $g =$	h) $38.7 - h = 62.4$ $h =$	i) $-17.9 - k = 100$ $k =$

6. En el laboratorio de química, un estudiante observó que la temperatura de una sustancia disminuía cada 60 segundos la misma cantidad de grados. Al iniciar el experimento, la temperatura de esa sustancia era 36 °C, y seis minutos después era –24 °C. En otro experimento observó que la temperatura de otra sustancia era –30 °C y que cada minuto disminuía 4 °C. Si inició los dos experimentos al mismo tiempo, ¿después de cuántos minutos las dos sustancias tendrán la misma temperatura? ¿Cuál será esa temperatura?

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 36

¿Cómo multiplico números con signo?

El trabajo que realices en esta hoja te ayudará a aprender a realizar multiplicaciones con dos números negativos.

1. Efectúa las siguientes operaciones usando la calculadora:

a) $-8 \times 6 =$ b) $-3 \times 4 =$ c) $5 \times (-6) =$ d) $-9 \times 3 =$

e) $5 \times -7 =$ f) $8 \times (-4) =$ g) $10 \times (-10) =$ h) $-1 \times 8 =$

2. Explica lo que crees que hace la calculadora para multiplicar un número positivo por un número negativo. _____

3. Un estudiante dice que -7×13 da el mismo resultado que $13 \times (-7)$. ¿Es correcto lo que dice? _____
Justifica tu respuesta. _____

4. Efectúa las siguientes operaciones sin usar la calculadora.

a) $-9 \times 7 =$ b) $-8 \times 5 =$ c) $7 \times (-4) =$ d) $-10 \times 5 =$

e) $6 \times -7 =$ f) $9 \times (-9) =$ g) $7 \times (-7) =$ h) $-1 \times 9 =$

5. Ahora usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso anterior. ¿Todas tus respuestas fueron correctas? _____ ¿Cometiste algunos errores? _____
¿En qué consistieron? _____

6. Exploremos ahora cómo multiplicar dos números negativos. Para esto, realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $-8 \times (-5) =$ b) $-7 \times (-9) =$ c) $-6 \times (-6) =$ d) $-10 \times (-4) =$

e) $-5 \times (-7) =$ f) $-4 \times (-9) =$ g) $-8 \times (-8) =$ h) $-1 \times (-10) =$

7. Explica qué hace la calculadora para multiplicar un número negativo por otro número negativo. _____

_____

8. Un estudiante de otra escuela dice que $-4 \times (-12)$ da el mismo resultado que $-12 \times (-4)$. ¿Es correcto lo que dice? _____ ¿Por qué? _____

_____

9. Una estudiante dice que la expresión $-(-7)$ es equivalente a la operación $-1 \times (-7)$. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué? _____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 37

Algo más sobre la multiplicación de números con signo

Veamos cómo hacer multiplicaciones con más de dos números con signo.

1. Realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $2 \times 4 \times (-5) =$ b) $-2 \times 4 \times (-5) =$ c) $-2 \times (-4) \times (-5) =$ d) $2 \times 4 \times 5 =$

e) $3 \times (-2) \times (-4) =$ f) $3 \times (-2) \times 4 =$ g) $-3 \times (-2) \times (-4) =$ h) $3 \times 2 \times 4 =$

i) $5 \times 3 \times (-4) =$ j) $-5 \times (-3) \times 4 =$ k) $-5 \times (-3) \times (-4) =$ l) $5 \times 3 \times 4 =$

2. ¿De qué depende el signo del resultado cuando multiplicas tres números? _____

_____

3. Realiza las siguientes operaciones **sin usar la calculadora**.

a) $3 \times 5 \times (-4) =$ b) $-4 \times 4 \times (-2) =$ c) $-2 \times (-3) \times (-3) =$ d) $3 \times 4 \times 3 =$

e) $4 \times (-1) \times (-3) =$ f) $5 \times (-1) \times 2 =$ g) $-6 \times (-2) \times (-4) =$ h) $4 \times 3 \times 6 =$

i) $6 \times 2 \times (-1) =$ j) $-3 \times (-4) \times 5 =$ k) $-5 \times (-2) \times (-1) =$ l) $5 \times 5 \times 4 =$

4. Ahora usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el punto anterior. ¿Todas tus respuestas fueron correctas? _____ ¿Cuáles fueron incorrectas? _____

¿En qué consistieron tus errores? _____

5. La siguiente actividad es un juego. Las operaciones ya están hechas y al resultado sólo le falta el signo. El juego consiste precisamente en **deducir el signo del resultado, sin hacer ninguna operación**. Escribe el signo del resultado en el espacio correspondiente.

a) $-10 \times 2 \times (-5) =$ ☐ 100
b) $-1.5 \times (-2) \times (-6) =$ ☐ 18
c) $-6.4 \times (-3.2) \times -1 =$ ☐ 20.48
d) $-4.6 \times 2.7 \times 5.9 =$ ☐ 73.278

e) $-7 \times (-8) \times (-0.2) =$ ☐ 11.2
f) $-1.7 \times 0.8 \times -2 =$ ☐ 2.72
g) $-1.3 \times (-3.8) \times 5.1 =$ ☐ 25.194
h) $4.5 \times 5.7 \times 9.3 =$ ☐ 238.545

i) $-1.5 \times (-2.3) \times (-5.1) \times -1.2 =$ ☐ 21.114
j) $-8.5 \times (-2.5) \times (-5.4) \times -1.8 =$ ☐ 206.55
k) $-9 \times 10.2 \times (-5.1) \times 4.5 =$ ☐ 2106.81
l) $-8.5 \times (-1.1) \times (-2.1) \times -1.4 =$ ☐ 27.489

m) $-1.7 \times 2.3) \times (-5.6) \times 3.3 =$ ☐ 72.2568
n) $7.5 \times (-2) \times (-5.4) \times -1.6 =$ ☐ 129.6
o) $-1.2 \times (3.4) \times (-6.1) \times -3 =$ ☐ 74.664
p) $-2.5 \times (-4.8) \times 6.4 \times 1.2 =$ ☐ 92.16

6. Usa la calculadora para revisar las respuestas que escribiste en el punto anterior. ¿Cuántas respuestas fueron correctas? _____ ¿Cuáles fueron incorrectas? _____

¿En qué te equivocaste? _____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 38

¿Cómo divido números con signo?

Efectúa las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $-8 \div 2 =$ b) $-12 \div 4 =$ c) $18 \div (-6) =$ d) $-9 \div 3 =$

e) $15 \div (-5) =$ f) $8 \div (-4) =$ g) $10 \div (-10) =$ h) $-1 \div 8 =$

1. ¿Qué crees que hace la calculadora para ejecutar divisiones de números con signo? Explícalo mediante un ejemplo. _____

_____

2. Un estudiante de otra escuela dice que $-8 \div 20$ da el mismo resultado que $20 \div (-8)$. ¿Es correcto lo que dice? _____ ¿Por qué? _____

_____

3. Efectúa las siguientes operaciones **sin usar la calculadora**.

a) $-91 \div 7 =$ b) $-80 \div 5 =$ c) $70 \div (-4) =$ d) $-10 \div 5 =$

e) $6 \div (-7) =$ f) $9 \div (-9) =$ g) $7 \div (-7) =$ h) $-1 \div 9 =$

4. Usa la calculadora para revisar tus respuestas a las operaciones anteriores. ¿Todas las repuestas fueron correctas? _____ ¿Cuáles fueron incorrectas? _____

¿En qué consistieron los errores? _____

_____

_____

5. Ahora trata de dividir un número negativo entre otro número negativo. Para ello realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $-8 \div (-5) =$ b) $-7 \div (-9) =$ c) $-6 \div (-6) =$ d) $-10 \div (-4) =$

e) $-5 \div (-7) =$ f) $-4 \div (-9) =$ g) $-8 \div (-8) =$ h) $-1 \div (-10) =$

6. Explica, mediante un ejemplo, qué crees que hace la calculadora para dividir un número negativo entre otro número negativo. _____

_____

7. Una estudiante dice que $-4 \div (-12)$ da el mismo resultado que $-12 \div (-4)$. ¿Es correcto lo que dice? _____ ¿Por qué? _____

_____

8. ¿Qué semejanza encuentras entre la multiplicación y la división con números positivos y negativos?

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 39

Potencias de números con signo

Un estudiante de una escuela vecina dice que $5^2 = 5 \times 2 = 10$.

1. ¿Es correcto lo que dice? _____ ¿Por qué? _____
¿Qué resultado da la calculadora si haces la operación 5^2? _____

2. Haz las siguientes operaciones con la calculadora:

a) -6^2 _____ b) $(-6)^2$ _____

3. ¿Qué resultado obtuviste en el inciso a? _____ ¿Y en el inciso b? _____
¿Cómo "interpreta" la calculadora la expresión -6^2? _____ ¿Cómo "interpreta" la calculadora la expresión $(-6)^2$? _____

4. ¿Qué debes escribir en la calculadora si quieres "elevar menos siete al cubo"? _____
Si escribiste correctamente esa expresión debes obtener como resultado –343. Si tu respuesta no fue correcta, corrígela y escríbela a continuación. _____

5. ¿Qué debes escribir en la calculadora si quieres restarle 100 "al cubo de –6"? _____ Si escribiste correctamente esa expresión debes obtener como resultado –316. Si tu respuesta no fue correcta, corrígela y escríbela a continuación. _____

_____

6. Haz las siguientes operaciones **sin usar la calculadora**.

a) $-5^2 =$ _____ b) $(-7)^3 =$ _____ c) $-3^4 =$ _____

d) $-4^3 =$ _____ e) $(-2)^6 =$ _____ f) $(-5)^4 =$ _____

7. Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el punto anterior. ¿Cuántos aciertos obtuviste? _____ ¿Cometiste algunos errores? _____ ¿En qué te equivocaste? _____

_____

8. La siguiente actividad es un juego. Las operaciones ya se están hechas y al resultado sólo le falta el signo. El juego consiste precisamente en **deducir el signo del resultado, sin hacer ninguna operación**. Escribe el signo del resultado en el espacio correspondiente.

a)	$-5^3 =$	☐ 125	b)	$(-3)^6 =$	☐ 729	c)	$(-9)^5 =$	☐ 59049
d)	$-7^8 =$	☐ 5764801	e)	$(-8)^4 =$	☐ 4096	f)	$-(-5)^4 =$	☐ 625

9. Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el punto anterior. ¿Cuántas respuestas fueron correctas? _____ ¿Cuáles fueron incorrectas? _____
¿En qué te equivocaste? _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 40

Algunas aplicaciones de los números con signo

Escribe una suma de números con signo que corresponda a cada una de las siguientes situaciones.

1. En una ciudad la temperatura a las 10 de la noche era de 16 °C. A partir de esa hora la temperatura disminuyó 1 °C cada diez minutos. ¿Cuál era la temperatura a las 5:00 a.m. del siguiente día? _____

_____

2. Un equipo de futbol americano perdió 2 yardas en la primera oportunidad; en la segunda oportunidad ganó 7 yardas; en la tercera logró cero yardas, y en la última perdió 9 yardas. ¿Cuál fue el resultado de sus intentos en las cuatro oportunidades? _____

3. Colón descubrió América en 1492, Roma fue fundada 2275 años antes. ¿En qué año tuvo lugar la fundación de Roma? _____

4. Completa la siguiente tabla escribiendo en cada cuadro uno de los siguientes números: −13, −10, −7, −4, 2, 5, 8 y 11. La condición que debe cumplir tu tabla mágica es que cada fila, columna o bloque de tres números colocados en línea recta deben sumar lo mismo.

	−1	

5. ¿Cuál es el valor numérico de la expresión $a^2 + 2a + 5$, si $a = -3$. _____

_____

6. ¿Cuál es el valor numérico de $-m$, si $m = -9.5$? _____

7. Si x representa a un número positivo, ¿cuál es el signo del valor numérico de $-x$? _____

8. Si x representa un número negativo, ¿cuál es el signo del valor numérico de $-x$? _____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. En los programas y la guía de estudio de matemáticas de educación básica hay una sección dedicada a las competencias matemáticas, estúdialas y debate con tus compañeros de qué manera las actividades de este bloque promueven el desarrollo de esas competencias. Elabora algunos ejemplos que apoyen el debate.
2. En la presentación de este bloque se menciona el rol de la calculadora. Haz un ensayo al respecto y preséntalo a tus compañeros. Elabora tus conclusiones.
3. Identifica las reglas para operar números con signo y haz una lista para cada operación; compárala con la de tus compañeros y escribe tus conclusiones.
4. Realiza una investigación en diversas fuentes matemáticas acerca de los números con signo, elabora una presentación al respecto y expónla ante tus compañeros.
5. En el bloque no hay una hoja de trabajo que aborde la operación de la raíz cuadrada; redacta un breve ensayo al respecto, en el que justifiques con argumentos matemáticos a qué crees que se deba.
6. Si se abordara la raíz cuadrada de números con signo, se requeriría incluir otro tipo de números, ¿cuáles serían esos números? Haz una indagación sobre este punto y presenta los resultados a tu grupo.

www.FreeLibros.me

Bloque 5

El concepto de aproximación en el contexto de la potenciación y radicación

Este bloque aborda el estudio de las operaciones de potenciación y radicación para introducir el concepto de aproximación. El cálculo de potencias y raíces cuyo resultado no es un número decimal periódico o un número con una cantidad definida de dígitos decimales, requiere aplicar estrategias de aproximación. En este bloque se induce la generación de estrategias no convencionales, en particular la de ensayo y refinación.

Además de abordar los conceptos de potenciación y radicación, así como su interrelación, el recorrido de las tareas propuestas favorece el desarrollo del sentido numérico, específicamente en lo referente a la aplicación de las propiedades de las operaciones de números decimales y las características de su estructura numérica. Por ejemplo, formular respuestas a preguntas como las siguientes: ¿entre dos números decimales cualesquiera hay otro número decimal? ¿Cómo podemos encontrar ese número? ¿Cuántos números decimales hay entre dos números decimales cualesquiera?

En las hojas de trabajo la calculadora está presente como la herramienta en la que recae todo el trabajo operativo para dar la oportunidad a quien la usa de centrar su atención en la exploración de los resultados que despliega; el manejo técnico de la máquina es muy "amigable" y favorece el desarrollo de estrategias para obtener la mejor aproximación con un margen de error determinado.

Las actividades del bloque abordan aspectos acordes con las competencias matemáticas sugeridas en los Programas y Guías de la Educación Básica.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 41

Exponentes fraccionarios

Una estudiante dice que entre 4.378 y 4.379 no hay ningún número decimal.

1. ¿Es correcto lo que dice? _____

Explica por qué. _____

_____

2. Si no estás de acuerdo, da un ejemplo que justifique tu respuesta. _____

3. Un estudiante dice que $4^2 = 16$ y $4^3 = 64$. ¿Es cierto lo que dice? _____

¿Por qué? _____

_____

4. ¿Hay alguna potencia de 4, de manera que 4^x sea aproximadamente 29? _____

Explora posibilidades con tu calculadora y encuentra esa potencia. _____

Compara tu respuesta con las de tus compañeros; la mejor respuesta es la que muestre una mejor aproximación.

5. ¿Cuál es la mejor aproximación **con tres cifras decimales** para el valor de x, de manera que 4^x se aproxime a 29? _____

¿Por qué puedes asegurar que la aproximación que encontraste es la mejor? _____

_____

6. ¿Cuál es el valor **con cuatro cifras decimales** para k, de manera que el valor de 6^k sea la mejor aproximación para 5000? _____ ¿Por qué puedes asegurar que la aproximación que encontraste es la mejor? _____

7. ¿Cuál es el valor **con cinco cifras decimales** para x, de manera que 5^x sea la mejor aproximación para 32? _____

8. En cada uno de los siguientes casos, encuentra la mejor aproximación con **tres cifras decimales** para el valor de x (el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente").

a) $7^x \approx 135$	b) $9^x \approx 100$	c) $10^x \approx 120$	d) $10^x \approx 78$
$x =$ _____	$x =$ _____	$x =$ _____	$x =$ _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 42

Exponentes negativos

Haz la operación 5^{-1} en la calculadora. Un estudiante dice que $5^{-1} = 0.2$, y una de sus compañeras dice que $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

1. ¿Cuál de los dos está en lo correcto? _____
¿Por qué? _____

2. Otro estudiante dice que $10^{-3} = 0.001$. ¿Es correcto ese resultado? _____
¿Por qué? _____

3. ¿A qué potencia debe elevarse 10 para obtener como resultado 0.000001? _____

4. ¿A qué potencia puedes elevar 10 para obtener una buena aproximación al valor 0.5? _____

5. ¿Cuál es la mejor aproximación **con cuatro cifras decimales** para y, de manera que $10^y \approx 0.38$?

6. ¿Cuál es la mejor aproximación **con tres cifras decimales** para r, de manera que $10^r \approx 2000$?

7. ¿Cuál es la mejor aproximación **con cuatro cifras decimales** para x, de manera que $10^x \approx 0.0258$?

8. Una estudiante dice que $25^{\frac{1}{2}} = 25^{0.5} = \sqrt{25}$. ¿Es correcto lo que afirma? _____
¿Cómo puedes verificar si lo que ella dice es correcto o no? _____

9. Encuentra el valor de x de manera que $64^x = \sqrt[3]{64}$ $x =$ _____

10. Encuentra el valor de x de manera que $32^x = \sqrt[5]{32}$ $x =$ _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 43

¡Se descompuso la tecla de raíz cuadrada!

Supongamos que la tecla de raíz cuadrada se ha descompuesto, ¿qué harías para contestar las siguientes preguntas **sin usar esa tecla**?

1. ¿Cómo encontrarías la raíz cuadrada de 25?

2. ¿Cómo encontrarías la raíz cuadrada de 81?

3. ¿Cuál es el número entero que mejor se aproxima a la raíz cuadrada de 53?

4. ¿Cuál es el número entero que mejor se aproxima a la raíz cuadrada de 75?

5. ¿Puedes encontrar una aproximación para la raíz cuadrada de 133 con una cifra decimal? ¿Cuál es?

6. ¿Puedes encontrar una mejor aproximación para la raíz cuadrada de 133 con tres cifras decimales? ¿Cuál es?

7. ¿Puedes encontrar la mejor aproximación con cuatro cifras decimales para la raíz cuadrada de 133? ¿Cuál es?

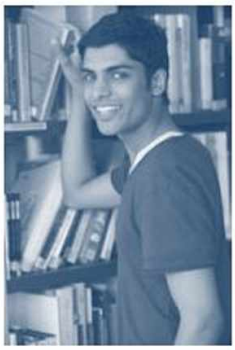
8. Podemos tener una aproximación a un número "**por abajo**" o "**por arriba**". Por ejemplo, 6.7 es una aproximación "por abajo" para el número 7, y 7.1 es una aproximación "por arriba". Observa que 7.1 es una mejor aproximación que 6.7, porque $7.1 - 7 = 0.1$, en tanto que $7 - 6.7 = 0.3$; es decir, 7.1 está "más cerca" de 7 que 6.7. A las diferencias 0.1 y 0.3 se les llama "error absoluto" en la aproximación.

9. ¿Puedes encontrar una mejor aproximación "por arriba" para 7?
   ¿Cuál es?

10. Sin usar la tecla de la raíz cuadrada, encuentra **la mejor** aproximación "por abajo", **con un número entero y una cifra decimal**, para la raíz cuadrada de 72. ¿Cuál es esa aproximación?
    Explica qué es lo que te permite afirmar que la aproximación que encontraste es la mejor **"por abajo"** con una cifra decimal para la raíz cuadrada de 72.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 44



Aproximación "por abajo" y "por arriba"

1. Encuentra la **mejor** aproximación "por abajo" para cada una de las siguientes raíces cuadradas. Tu aproximación debe tener dos cifras decimales.

No debes usar la tecla de raíz cuadrada.

a) $\sqrt{37}$ b) $\sqrt{97}$ c) $\sqrt{108}$

d) $\sqrt{90}$ e) $\sqrt{134}$ f) $\sqrt{130}$

g) $\sqrt{452}$ h) $\sqrt{725}$ i) $\sqrt{927}$

2. Encuentra la mejor aproximación "por arriba" para cada una de las siguientes raíces cuadradas. Tu aproximación debe tener tres cifras decimales; recuerda que no debes usar la tecla de raíz cuadrada.

a) $\sqrt{48}$ b) $\sqrt{227}$ c) $\sqrt{326}$

d) $\sqrt{405}$ e) $\sqrt{618}$ f) $\sqrt{853}$

g) $\sqrt{958}$ h) $\sqrt{1104}$ i) $\sqrt{1005}$

3. Encuentra la **mejor** aproximación "por arriba" y la mejor aproximación "por abajo", **con tres cifras decimales**, para $\sqrt{2}$.

_____ $< \sqrt{2} <$ _____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. Identifica los contenidos matemáticos explícitos e implícitos en las actividades de este bloque y haz una lista de ellos. Compara tu lista con la de tus compañeros y, en su caso, realiza los ajustes pertinentes a tu trabajo.
2. Elabora un mapa conceptual con los contenidos matemáticos que identificaste.
3. Revisa los Programas y Guías de Educación Básica e identifica en ellos los contenidos matemáticos que están relacionados con los de este bloque. Haz una tabla al respecto.
4. Consulta los Programas y Guías de Educación Básica para identificar las competencias matemáticas que se sugiere que desarrollen los alumnos, e identifica cuáles y de qué manera se abordan en las actividades de este bloque.
5. Organiza con tus compañeros una sesión para discurrir acerca del rol de la calculadora en las hojas de trabajo de este bloque.
6. Haz una investigación en las fuentes matemáticas que consideres pertinentes acerca de procedimientos formales para resolver ecuaciones como $7^x = 135$. Prepara una presentación al respecto y exponla a tus compañeros.
7. Haz una indagación sobre los métodos convencionales para encontrar la raíz cuadrada de un número y prepara una presentación para exponer tales resultados a tus compañeros.

www.FreeLibros.me

Bloque 6

Métodos no convencionales para resolver ecuaciones

El propósito de este bloque se centra en el uso de las letras como incógnitas, lo cual implica el estudio de ecuaciones. Para ello es necesario tener en claro algunos aspectos como el que las letras simbolizan números, que el signo igual representa la equivalencia entre los dos miembros de una ecuación, y que el miembro del lado derecho de una ecuación no necesariamente consiste en un simple término numérico.

Las actividades contenidas en las hojas de trabajo promueven el desarrollo de diferentes estrategias para la resolución de ecuaciones basadas en el conocimiento aritmético previo de los estudiantes, como el uso de hechos numéricos, técnicas de conteo, el "encubrimiento" de números, deshacer operaciones (o trabajar hacia atrás), y la sustitución por ensayo y error, entre otros.

La incorporación de la calculadora coadyuva en la aparición de las estrategias mencionadas, ya que entre otros aspectos ofrece una retroalimentación casi inmediata para probar las conjeturas sobre los posibles valores de las incógnitas.

Es muy posible que debido a tu paso por los anteriores niveles educativos (Educación Básica y Media Superior) conozcas y tengas el dominio de métodos formales para la solución de ecuaciones; sin embargo, te invitamos a que explores otras formas de solución, acordes con las de los alumnos de la Educación Básica.

Las competencias matemáticas promovidas en este bloque están en consonancia con las esperadas por los programas oficiales de Educación Básica, lo cual sugiere que pongas mucha atención al trabajar con estas actividades por su potencial para tu formación como futuro docente.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 45

¿Incógnitas?, ¿ecuaciones?... ¿Qué es eso?

1. En las siguientes expresiones se ha usado una letra para representar un número. **Encuentra en cada ecuación el número que falta y comprueba que ninguna de tus respuestas sea incorrecta**. Utiliza la calculadora para verificar tus respuestas.

a) $b + 1.03 = 24.7$ $b =$	b) $m - 1.67 = 30.25$ $m =$	c) $p - 12.22 = 4.05$ $p =$
d) $4.8 - r = 3.5$ $r =$	e) $\frac{5.2}{n} = 4$ $n =$	f) $5 \times b - 1 = 29$ $b =$
g) $k - 1.5 = 6.2$ $k =$	h) $2 \times c = 11$ $c =$	i) $3 \times a + 1 = 121$ $a =$

2. ¿Hay alguna forma que te permita verificar que tus respuestas son correctas? _____
Comenta esto con tus compañeros y anota el método que te parezca más eficaz. _____

_____

_____

3. Una estudiante dice que el número que falta en $4 \times d + 2 = 4$ es 0.5. ¿Estás de acuerdo? _____
¿Por qué? _____

_____

_____

4. Otro alumno dice que el número que falta en $2 \times c = 11$ es 5.5, y una alumna dice que es $\frac{11}{2}$. ¿Quién de los dos tiene razón? ¿Los dos están equivocados? ¿Las dos respuestas son correctas? Comenta esto con tus compañeros y anota tus conclusiones. _____

_____

_____

Resumen

A expresiones como $3 \times b + 2 = 14$ se les llama **ecuaciones**, y a la letra que aparece en una ecuación se le llama **incógnita**. Podemos usar cualquier letra del abecedario para representar una incógnita.

En una ecuación puedes sustituir una incógnita con cualquier valor numérico; por ejemplo, en la ecuación $3 \times b + 2 = 14$ podemos decidir que b valga 5, por lo que $3 \times b + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$. Sin embargo, la condición impuesta por la ecuación es que el valor numérico de $3 \times b + 2$ sea **14**, por lo que $b = 5$ no es el número que buscamos. Observa que sólo cuando $b = 4$, $3 \times b + 2$ es igual a 14. Por esto diremos que $b = 4$ es la **solución** de $3 \times b + 2 = 14$.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 46

Números perdidos

1. Encuentra la solución de cada una de las siguientes ecuaciones. **Comprueba que ninguna de tus respuestas sean incorrectas**. Utiliza la calculadora para verificar tus resultados.

a) $2 \times a - \frac{1}{3} = 1$	b) $18 = 5 \times a + 3$	c) $27 = 18 \times a + 9$
d) $\frac{5}{7} - b = \frac{1}{4}$	e) $3.4 = c + 1.2$	f) $d \times 4 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
g) $356 + 2 \times x = 376$	h) $457 = 25 + 2 \times y$	i) $18 + 3 \times y = 45$

2. ¿Encontraste un método para resolver las ecuaciones anteriores? _____

Describe el método que empleaste de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender.

_____

_____

_____

3. Encuentra los números que faltan. Utiliza la calculadora para comprobar que tus respuestas sean correctas. Anota en cada espacio las operaciones que hiciste.

a) $2 + 3 \times m = 2 \times m + 7$ $m =$	b) $25 + 3 \times y = 8 \times y + 5$ $y =$
c) $120 + 5 \times p = 10 \times p + 85$ $p =$	d) $18 \times q - 1 = 0$ $q =$
e) $b^3 - 120 = 5$ $b =$	f) $b^3 + 2 \times b = 12$ $b =$
g) $5^x = 3125$ $x =$	h) $2^x = 64$ $x =$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 47

Ecuaciones que tienen más de una solución

Una estudiante dice que la ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$.*

1. ¿Estás de acuerdo? _____ ¿Por qué? _____
Escribe a continuación tus conclusiones de manera que cualquiera de tus compañeros las pueda entender. _____

_____

_____

2. Un estudiante encontró dos soluciones para la ecuación $x^2 + x = 0$. Tú también las puedes encontrar. Escribe a continuación tu respuesta y el razonamiento para resolver esa ecuación. _____

_____

_____

_____

3. Otro estudiante dice que encontró dos soluciones para la ecuación $x^2 + x = 20$, $x_1 = 4$ y $x_2 = -5$. ¿Estás de acuerdo? _____ ¿Por qué? _____
Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros. _____

_____

_____

_____

4. Las siguientes ecuaciones tienen dos soluciones. Encuéntralas y verifica tus respuestas usando tu calculadora. No debe haber ningún error.

a) $x^2 + 5 = 69$ $x_1 =$ $x_2 =$	b) $y^2 = 400$ $y_1 =$ $y_2 =$	c) $a^2 + 2 \times a = 0$
d) $x^2 - x = 90$	e) $a^2 + 2 = 123$	f) $a^2 - 7 = 93$
g) $c^2 - 3 \times c = 10$	h) $d^2 - 2 \times d = 8$	i) $m^2 + 3 \times m = 70$

* x_1 se lee "x subíndice 1" y x_2 se lee "x subíndice 2". De manera más breve, x_1 se lee "x uno" y x_2 se lee "x dos".

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 48

Ecuaciones distintas que tienen la misma solución

La solución de la ecuación $2 \times y - 4 = 8$ es $y = 6$ porque $2 \times 6 - 4 = 8$.

1. ¿Estás de acuerdo en que 6 también es la solución de la ecuación $5 \times a + 4 = 34$?

2. Construye otras tres ecuaciones cuya solución también sea 6.

3. Construye tres ecuaciones cuya solución sea $y = -4$.

4. Construye tres ecuaciones cuya solución sea $b = \frac{2}{3}$. Pide a uno de tus compañeros que las resuelva para verificar tus respuestas.

5. Un estudiante dice que $x = 2$ es la solución de la ecuación $\frac{2 \times (3x + 4)}{3} = x + 2$.
¿Estás de acuerdo?
Explica por qué.

6. Construye tres ecuaciones como la de la actividad 5 que tengan por solución $x = 2$. Luego intercambia con algún compañero tus ecuaciones y resuélvanlas para verificar que todas tienen por solución $x = 2$.

7. ¿Encontraste un método para construir ecuaciones a partir de una solución que ya conoces?
Describe ese método de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderlo.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 49

Ecuaciones equivalentes

A las ecuaciones que tienen una misma solución se les llama **ecuaciones equivalentes**. Por ejemplo, las ecuaciones $7 \times y - 5 = 51$ y $5 \times m + 3 = 43$ son equivalentes porque ambas tienen la misma solución.

1. ¿Cuál es la solución de estas ecuaciones? _____

2. En las siguientes ecuaciones, encuentra cuáles son equivalentes. Justifica tus respuestas.

a) $4 \times a - 2 = 34$ b) $7 \times 5 - 3 = 32$ c) $12 + 4 \times a = 14$

d) $15 + 6 \times y = 18$ e) $2 \times m + 11 = 15$ f) $5 \times b - 1 = 44$

g) $28 - 5 \times p = 3$ h) $23 - 12 \times r = 17$ i) $21 + 8 \times k = 25$

j) $3 \times y + 1 = 0$ k) $20 - 2 \times m = 2$ l) $42 + 4 \times n = 62$

3. Algunos estudiantes resolvieron las ecuaciones que se muestran a continuación. Revisa sus respuestas. Si encuentras soluciones incorrectas, corrígelas y presenta la respuesta correcta.

a) $3 \times a + 5 = 41,\ a = 12$	b) $4 \times p - 2 = 20,\ p = 7$	c) $16 - r = 0,\ r = -16$
d) $20 = \frac{5}{k},\ k = 4$	e) $2 \times n + 5 = 5;\ n = 0$	f) $\frac{2 \times a + 1}{5} = 3;\ a = 7$
g) $(b + 3) \times 2 - 4 = 8;\ b = 3$	h) $7 = \frac{3 \times y + 1}{4};\ y = 9$	i) $\frac{4 \times a - 1}{3} = 9;\ a = 27$
j) $(2 \times b + 3) \times 5 - 1 = 34;\ b = 3$	k) $(2 + 3 \times x) \times 4 = 20;\ x = 1$	l) $\frac{2 \times x - 1}{4 - x} = 5;\ x = 3$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 50

Tanteo y refinamiento

En esta hoja de trabajo te mostraremos la estrategia que aplicó una estudiante para resolver ecuaciones. Probablemente tú seguiste alguna estrategia como la de ella cuando resolviste ecuaciones. Sin embargo, conocer otras formas para resolverlas enriquecerá tu conocimiento. Llamaremos **tanteo y refinamiento** a la estrategia que aplicó esa estudiante.

Se le pidió que resolviera la ecuación $x^2 - 9 = 55$. La estrategia que empleó se puede describir de la siguiente manera:

- Empezó por preguntarse "¿qué significa x^2?". Finalmente, su respuesta fue "x^2", que representa un cierto número que se va a elevar al cuadrado.
- Después intentó asignarle diferentes valores a x. Primero probó con $x = 5$, y obtuvo que $x^2 = 5 \times 5 = 25$. Pero $25 - 9 = 16$, y el resultado que quería era 55.
- Luego intentó con un número más grande, $x = 9$. Pero $x^2 = 81$, y $81 - 9$ no da 55.
- Por último, encontró la solución, que es $x = 8$. Afirmó que ésa es la solución porque $8^2 = 64$ y $64 - 9 = 55$. Como $(-8)^2 = (-8) \times (-8) = 64$; por lo tanto, también $x = -8$ es la solución de esa ecuación.

1. ¿Pensaste de manera parecida cuando resolviste ecuaciones en las hojas de trabajo anteriores? _____

¿Entendiste cuál fue su estrategia? _____

2. Resuelve las siguientes ecuaciones siguiendo la estrategia que hemos llamado "**tanteo y refinamiento**".

a) $x^2 + 15 = 31$	b) $x^2 + 31 = 40$
c) $y^3 - 10 = 54$	d) $y^4 - 1 = 15$
e) $p^2 - 4 = 117$	f) $67 = p^2 + 18$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 51

Simplificación de ecuaciones

En esta hoja de trabajo mostraremos la estrategia que siguió una estudiante.

Se le pidió que resolviera la ecuación **$5 \times (a + 2) + 4 = 59$**. Su estrategia consistió en analizar la ecuación y reducirla sistemáticamente hasta obtener una ecuación más sencilla. Llamaremos **"simplificación de ecuaciones"** a la estrategia que aplicó esa estudiante. A continuación se describe su razonamiento.

Primero se preguntó qué información proporciona la expresión **$5 \times (a + 2)$** y concluyó que **$5 \times (a + 2)$** indica que $a + 2$ se debe multiplicar por 5. El problema es que ella que no sabía cuál era el valor de $a + 2$. Después de algunos intentos encontró que no es difícil resolver esa ecuación. Razonó como sigue:

- Como $5 \times (a + 2) + 4 = 59$, entonces $5 \times (a + 2)$ debe valer 55, porque $55 + 4 = 59$. Esto le permitió construir una ecuación más simple: $5 \times (a + 2) = 55$.
- De la misma manera, encontró que $(a + 2)$ debe valer la quinta parte de 55, es decir 11. Eso le permitió reducir la aparentemente difícil ecuación $5 \times (a + 2) + 4 = 59$, a una mucho más sencilla: $a + 2 = 11$, cuya solución es $a = 9$.

1. Comprueba que $a = 9$ es la solución de la ecuación $5 \times (a + 2) + 4 = 59$. _____

_____

_____

2. Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método que llamamos "simplificación de ecuaciones". Recuerda que siempre debes comprobar tus respuestas para no tener errores.

a) $4 (x + 12) + 7 = 87$	b) $10 + 3 (y - 8) = 31$
c) $34 - 2 (a - 1) = 18$	d) $7 (b + 3) - 5 = 51$
e) $22 + \frac{p + 8}{3} = 28$	f) $\frac{q - 3}{4} + 13 = 16$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 52

Deshaciendo operaciones

Dos estudiantes resolvieron la ecuación $\mathbf{5 \times (a + 2) + 4 = 59}$ "deshaciendo operaciones". Su estrategia consistió en usar operaciones inversas a las que se muestran en la ecuación. A continuación se describe su razonamiento.

- Primero notaron que si $5 \times (a + 2) + 4 = 59$, entonces el valor de $5 \times (a + 2)$ lo podían obtener **deshaciendo sumar 4** a través de **restar 4**. Esto los condujo a la ecuación $\mathbf{5 \times (a + 2) = 55}$.
- Para hacer más sencilla la ecuación $5 \times (a + 2) = 55$, primero **deshicieron multiplicar por 5** dividiendo entre 5. Con esto obtuvieron la ecuación $a + 2 = 1$, porque $a + 2$ es la quinta parte de $5 \times (a + 2)$, y la quinta parte de 55 es 11.
- Por último, resolvieron la ecuación $a + 2 = 11$; **deshicieron sumar 2** restando 2, y así encontraron que $a = 9$ es la solución de la ecuación $5 \times (a + 2) + 4 = 59$.

1. Describe brevemente el procedimiento que utilizaron. _____

_____

2. Ahora resuelve las siguientes ecuaciones como lo hicieron ellos. Usa tu calculadora para comprobar tus respuestas. Recuerda que no debe haber errores.

a) $7(a - 8) + 25 = 39$

b) $18 + 8(b + 4) = 94$

c) $\frac{2}{5} + 5(b - 1) = \frac{52}{5}$

d) $\frac{x - 8}{2} - 2 = 5$

e) $15 + \frac{y + 12}{3} = 22$

f) $\frac{x - 0.5}{8} + 5 = \frac{93}{16}$

g) $\frac{4(x - 5)}{3} - 6 = -2$

h) $\frac{5(x + 3)}{7} + 12 = 17$

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 53

Resolver ecuaciones no es tan difícil

1. Construye cuatro ecuaciones parecidas a esta: $\frac{5(x+3)}{7} + 12 = 17$

a)	b)	c)	d)

Una vez que las hayas resuelto y comprobado, intercámbialas con un compañero y resuélvanlas para verificar sus resultados.

2. Construye tres ecuaciones que tengan como solución tu número de lista. La primera ecuación no debe contener paréntesis; la segunda debe incluir paréntesis; y la tercera debe incluir una barra de división y paréntesis, como las ecuaciones de los incisos g y h de la hoja de trabajo anterior. Una vez que las hayas resuelto y comprobado, pídele a un compañero que las resuelva y tú resuelve las que él haya construido.

a)	b)	c)

3. Construye tres ecuaciones que tengan dos soluciones. Una vez que las hayas hecho intercámbialas con un compañero y comprueben sus resultados.

a)	b)	c)

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. En la presentación del bloque se mencionan las siguientes estrategias para resolver ecuaciones basadas en hechos básicos aritméticos:

   a. Encontrar "números escondidos".
   b. Deshacer operaciones (o trabajar hacia atrás).
   c. Ensayo y refinamiento.

2. Investiga acerca de estas estrategias y prepara una presentación al respecto; incluye ejemplos que se basen en las actividades del bloque.

3. Haz una lista de los contenidos aritméticos que apoyan la generación de estrategias como las del punto anterior. Justifica la conformación de la lista.

4. Identifica las competencias que proponen los Programas y Guías de Educación Básica relacionadas con las que este bloque de actividades promueve. Elabora una tabla que concentre la información.

5. Haz una búsqueda en artículos de investigación sobre las diversas problemáticas identificadas en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones. Elabora un ensayo y preséntalo a tus compañeros.

6. En las hojas de trabajo se menciona el concepto de "ecuaciones equivalentes". Haz una indagación sobre este concepto en las fuentes matemáticas que consideres pertinentes, y prepara una presentación para exponer a tus compañeros tus resultados.

7. Elabora un breve ensayo acerca de tu experiencia con las actividades de este bloque. Compártelo con tus compañeros e intercambia impresiones.

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

Bloque 7

Exponentes y simbolización

El propósito central de las actividades de este bloque es fortalecer las competencias lectoras y de expresión escrita con expresiones algebraicas que los estudiantes empezaron a cultivar en el bloque 6. Para este fin, aquí se toma como punto de partida el significado que han asignado los estudiantes a las literales en una ecuación como "un número que se desconoce, pero cuyo valor se puede encontrar". Esto ocurrirá si se lee correctamente la expresión algebraica que describe las relaciones entre "ese número aún desconocido" y el segundo miembro de la ecuación.

En el bloque 7 se extiende ese significado al abordar el uso más abstracto de las literales en el ámbito de las expresiones polinomiales; a esas expresiones les llamamos deliberadamente "fórmulas" porque es un término más familiar para los estudiantes dado su uso en geometría desde la educación primaria. Una fórmula es una expresión algebraica que permite hacer cálculos aritméticos si se asignan valores específicos a las literales involucradas en ella. En términos del álgebra, estas acciones se conocen como el cálculo del *valor numérico* de una expresión algebraica.

En las actividades de este bloque se acude a dicho cálculo para introducir la noción de función al trabajar con tablas de doble entrada que describen *valores de entrada* y *valores de salida*. Los valores de entrada son valores arbitrarios que se asignan a la literal involucrada en una "fórmula" y los valores de salida se obtienen realizando las operaciones aritméticas descritas en la fórmula que se está empleando.

El uso de las literales en este tipo de actividades induce un nuevo significado que es el de *variables*, el cual contrasta con su significado como *incógnitas* en una ecuación. Asimismo, el trabajo con tablas de valores de entrada y salida asociado a una fórmula específica permite sugerir la relación entre los conjuntos formados por los valores de entrada y valores de salida, los cuales corresponden a los conceptos de dominio y contradominio de una función.

En este bloque se introducen esas nociones y en los bloques 8, 9 y 10 se extienden al ámbito de la representación gráfica de la relación entre esos dos conjuntos de valores; de esta manera se pone en contacto al estudiante con las tres formas de representación de una función: algebraica, tabular y gráfica.

Se sugiere que mientras se avance en la realización de las actividades que aquí se presentan se relacionen las competencias que se desarrollarán con las propuestas en los programas de Educación Básica respecto del uso de las matemáticas como un lenguaje que permite comunicar ideas.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 54

Potencias y simbolización (1)

Una estudiante usó la fórmula a^2 para construir la siguiente tabla:

Valor de entrada	Valor de salida
2	4
3	9
5	25
7	49
8	64

1. Construye otra fórmula de manera que usando los valores de entrada que muestra la tabla produzca los mismos valores de salida. _____

Escribe tu fórmula en el siguiente espacio. _____

2. **Sin borrar nada en la fórmula** a^2 anterior, agrega a ésta lo que se requiera para que produzca los siguientes valores de salida:

Valor de entrada	Valor de salida
2	8
3	27
5	125
7	343
8	512

Escribe tu fórmula: _____

_____

3. Construye otra fórmula que produzca los mismos valores de salida que la anterior.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 55

Potencias y simbolización (2)

Una estudiante escribió una fórmula para construir la siguiente tabla:

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
2	16
5	625
7	2401
10	10000

1. Ahora, construye una fórmula que haga lo mismo que la de ella. _____

_____

2. Sin borrar nada en la fórmula que construiste, agrega lo que sea necesario para que produzca los siguientes valores de salida:

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
2	64
5	15625
7	117649
10	1000000

¿Qué le agregaste? _____

_____

3. Construye una nueva fórmula que produzca los mismos valores de salida que la última fórmula que construiste:

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 56

Potencias y simbolización (3)

Una estudiante creó una fórmula que produce los valores de salida que se muestran en la tabla.

Valor de entrada	Valor de salida
1	10
2	100
4	10 000
6	1 000 000
8	100 000 000

1. Construye una fórmula que produzca los mismos valores de salida que los de ella. _____

_____

_____

2. Ahora, sin borrar nada en la fórmula que acabas de construir, agrégale lo que se requiera para producir los valores de salida que se muestran en esta tabla.

Valor de entrada	Valor de salida
1	10
2	1 000
4	100 000
6	10 000 000
8	1 000 000 000

¿Qué le agregaste? _____

_____

_____

3. Construye una nueva fórmula que produzca los mismos valores de salida que la última fórmula que construiste.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 57

Potencias y simbolización (4)

Un estudiante escribió una fórmula que produce los siguientes valores de salida:

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
2	16
3	81
5	625
10	10 000

1. Construye una fórmula que haga lo mismo que la de él. _____

_____

2. Ahora, sin borrar nada en la fórmula que construiste, agrega lo necesario para que produzca los valores de salida que se muestran en esta tabla.

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
2	4
3	9
5	25
10	100

¿Qué le agregaste? _____

_____

3. Construye una nueva fórmula que produzca los mismos valores de salida que la última fórmula que construiste.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 58

¿Qué significa "elevar a la menos 1"?

Un estudiante construyó una fórmula que produce los siguientes valores de salida:

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
2	0.5
4	0.25
5	0.2
10	0.1

1. Construye una fórmula que haga lo mismo que la de él. _____

_____

2. Usa los valores de entrada de la tabla anterior con la fórmula a^{-1} (en un sistema algebraico computarizado, a^{-1} se produce al teclear **a^ – 1**). ¿Qué observas en los resultados que obtienes? _____

_____

3. Una estudiante dice que la fórmula $1 \div a$ da los mismos resultados que la fórmula a^{-1}. ¿Estás de acuerdo?

_____

Justifica tu respuesta mediante un ejemplo. _____

_____

_____

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
2	0.25
5	0.04
10	0.01
100	0.0001 (1.E 04)

4. Crea una fórmula que produzca los valores de la tabla contigua, y escríbela en este espacio.

5. Introduce la fórmula a^{-2} y úsala con los valores dados en la tabla anterior. ¿Qué observas? _____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 59

Leyes de los exponentes (1)

1. Una estudiante escribió la fórmula $r^2 \times r^4$ y la usó para obtener varios valores. Después de observar los resultados que obtenía afirmó que produce los mismos valores de salida que la fórmula r^7.

¿Estás de acuerdo? _____

¿Por qué? _____

_____

_____

2. Escribe ambas fórmulas y compruébalas.

¿Observas alguna relación entre los exponentes de $r^3 \times r^4$ y r^7? _____

_____

_____

3. Una estudiante hizo la fórmula $x^3 + x^2$ y concluyó que produce los mismos valores de salida que la fórmula x^5.

¿Estás de acuerdo? _____

¿Por qué? _____

_____

_____

4. Ahora, usa la calculadora para obtener algunos valores empleando ambas fórmulas. ¿Qué observas?

_____

_____

5. Construye cuatro fórmulas equivalentes a x^8 y comprueba que producen los mismos resultados. Recuerda que no debes tener ningún error. Escríbelas a continuación.

6. Encuentra otra forma de comprobar que las fórmulas son equivalentes sin tener que observar los resultados que producen y escríbela en forma detallada. _____

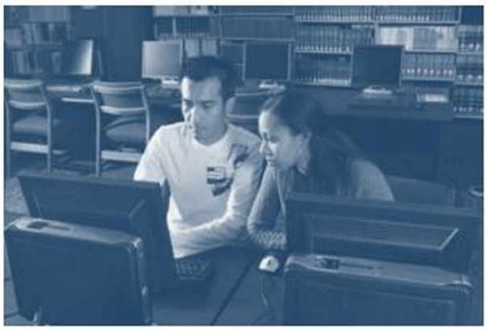
_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 60



Leyes de los exponentes (2)

Un profesor escribió en el pizarrón la siguiente expresión:

$$a^2 \times a^3$$

Luego pidió a sus estudiantes que la escribieran de una forma más breve. Dos de ellos pasaron al pizarrón y escribieron lo siguiente.

Primer estudiante: a^6
Segundo estudiante: a^5

1. ¿Estás de acuerdo con ambos o sólo con uno de ellos? _____
¿Con cuál? _____
Escribe dos ejemplos que justifiquen tu respuesta. _____

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y escribe tus conclusiones. _____

2. Un estudiante construyó la fórmula $n^2 + n^2$ y retó a sus compañeros a que la escribieran en forma más breve. Estas fueron las respuestas:

Primera respuesta: n^4 Segunda respuesta: $2n^2$

3. ¿Estás de acuerdo con alguna de estas respuestas? _____
¿Con cuál? _____
Explica por qué. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 61

¿Una potencia que siempre da por resultado 1?

Valor de entrada	Valor de salida
5	1
10	1
435	1
–12	1
8.3	1
–0.5	1

Una estudiante escribió una fórmula que le pareció curiosa porque siempre que usó como valor de entrada un número diferente de cero, el resultado fue 1.

El problema es que se le olvidó qué fue lo que escribió; sólo recuerda que el principio era algo como lo siguiente:

x^ ...

1. Ayúdale a completar su fórmula. Verifica que tus resultados coincidan con los de ella. Explica cómo obtuviste los resultados de la tabla con la fórmula que escribiste. _____

2. Crea otras tres fórmulas que produzcan los resultados de la tabla anterior y anótalas a continuación.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 62

Simbolización: números consecutivos

Los números consecutivos son números enteros como 3, 4, 5 y 6.

1. ¿Qué tipo de números obtienes si sumas dos números consecutivos? Escribe algunos ejemplos en los siguientes espacios.

2. Escribe una fórmula que sume dos números consecutivos. _____

_____

3. ¿Qué tipo de números obtienes si sumas tres números consecutivos? Escribe algunos ejemplos en los siguientes espacios.

4. Una fórmula siempre involucra, al menos, una literal; por ejemplo, la fórmula a^2. Hay fórmulas que involucran más literales; por ejemplo, la fórmula para calcular el perímetro de un rectángulo: $\mathbf{P = 2l + 2a}$, donde las literales $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{a}$ significan largo y ancho, respectivamente. Escribe una fórmula que involucre **una sola literal**, de manera que te sirva para calcular la suma de tres números consecutivos _____

_____

_____

5. ¿Qué tipo de números obtienes si sumas cinco números consecutivos? _____
Escribe algunos ejemplos en los siguientes espacios.

6. Escribe una fórmula que involucre una sola literal de manera que te sirva para calcular la suma de cinco números consecutivos cualesquiera. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 63

Términos semejantes (1)

Un estudiante creó la siguiente expresión.

$$3x + 4x$$

1. Completa la siguiente tabla usando esa expresión.

Valor de entrada (x)	2	7	12.5		30.7		100	
Valor de salida ($3x + 4x$)				152.9		490		1754.2

2. Escribe otra expresión más breve que produzca los mismos resultados.

3. Usa la expresión $-7x + x$ para completar la siguiente tabla.

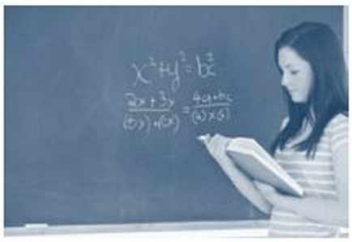
Valor de entrada (x)	5	7	13.6	25	30.7		100	
Valor de salida ($-7x + x$)						135		454.2

4. Escribe una expresión más breve que produzca los mismos valores de salida.

5. Una vez que hayas verificado que tus expresiones funcionan igual que las del estudiante que creó la primera expresión, explica por qué crees que funcionan así. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 64



Términos semejantes (2)

1. Utiliza la expresión $3b + 2 + 4b$ para completar la siguiente tabla.

Valor de entrada (b)	1	4	12.5	30	57.9	101.01		
Valor de salida ($3b + 2 + 4b$)							962	1206

2. Otra estudiante dice que esa expresión produce los mismos resultados que $9 \times b$. ¿Estás de acuerdo?

Explica tu respuesta. _____

3. Escribe las siguientes expresiones en forma más breve. Después, comprueba que las expresiones originales y las más breves produzcan los mismos valores de salida.

Expresión original	Expresión más breve
$-3x + 7x$	
$5a + 2a + 4$	
$4n + n + 3n$	
$8x - 2x + 4x$	
$5t - 7t + 2 + 3t$	

4. ¿Algunas de tus respuestas no fueron correctas? _____
Explica cuáles fueron sus errores.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 65

Términos semejantes (3)

a	*b*	*3a + 2b + 4a + 5b*
1	2	
1.5	3.5	
3	5	
6	5.5	
8	7.5	
10	10	

1. Usa la expresión $3a + 2b + 2a + 3b$ para completar la siguiente tabla.

2. Explica cómo obtuviste los resultados usando esa expresión. Incluye un ejemplo. _____

_____

_____

_____

_____

_____

3. Escribe en forma más breve la expresión $3a + 2b + 4a + 5b$.

4. Usa esta expresión reducida para obtener los valores de salida de la tabla anterior. ¿Obtienes los mismos resultados que los que produce la expresión $3a + 2b + 4a + 5b$? _____

¿Por qué? _____

Escribe tus conclusiones.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

La expresión $\mathbf{3a + 2b + 4a + 5b}$ está constituida de la siguiente manera:

- $3a$, $2b$, $2a$ y $3b$ son los términos.
- Un término está formado pon una parte constante y una parte literal. Por ejemplo, en $3a$ la parte constante es 3 y la parte literal (variable) es a.
- A la parte constante también se le llama **coeficiente**.
- Los términos que contienen la misma parte literal se denominan **términos semejantes**.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 66

Términos semejantes (4)

1. Encuentra una manera de escribir las siguientes expresiones de forma más breve.

Expresión original	Expresión más breve
$3x^2 + -2x^2$	
$5a^2 + -2a + 4$	
$-4n \times n$	
$8x - 2x + 4x^2$	
$5t^2 - 7t^3 + 2 + 3t^2$	
$3x^2 + 2x - 7x + x^2$	
$4y^3 - 3y + 3 - 5y^3 + 9 - y$	

2. Verifica tus respuestas utilizando diversos valores para las expresiones.

3. Escribe tus conclusiones. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 67

Equivalencia algebraica

1. Anota **V** en el paréntesis si la proposición que se plantea es verdadera, y **F** si consideras que es falsa. Justifica cada respuesta con dos ejemplos.

Proposición	Respuesta	Justificación
$2a + 2b = 2\ (a + b)$	( )	
$3m + 1 + 6m = 9m + 1$	( )	
$2p + 2q + 4p + 3q = 11\ (p + q)$	( )	
$7a - 2a + 4b + b = 5\ (a + b)$	( )	
$5a^2 + 2a^2 - 3a^2 = 10a^2$	( )	
$8x^3 + 2y^3 + y^3 - 2x^3 = 6x^3 + 3y^3$	( )	
$4r + 2s + 2r + 3s = 6r + 5s$	( )	
$2n^2 + 3n^3 = 5n^5$	( )	
$4a^2 + 2a + 2a^2 + 4a = 6a^2 + 6a$	( )	
$x^2 + x = x^3$	( )	

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 68

Simbolización algebraica y resolución de problemas

La directora de una escuela necesita que se pinten varios salones, incluyendo el techo, por lo que pide presupuesto a un pintor, para lo cual le proporciona la siguiente información: todos los salones son rectangulares pero de diferentes medidas, aun cuando tienen la misma altura, 3 metros. Después de tomar medidas de un salón , el pintor le dice que cobrará $7.00 por cada metro cuadrado, y le presenta un presupuesto total de $ 17 742.00.

1. Construye una fórmula que ayude a la directora a verificar cuántos metros cuadrados consideró el pintor en su presupuesto. Escríbela a continuación y después úsala para completar la tabla.

	Salón 1 4 m × 8 m	Salón 2 3.5 m × 4.5 m	Salón 3 5.75 m × 7 m	Biblioteca 12 m × 18.5 m	Salón de maestros 3.25 m × 6.45 m
Superficie (m^2)					
Presupuesto (pesos)					

2. ¿Tu resultado fue el mismo que el presupuesto del pintor? _____

¿Por qué? _____

3. El pintor afirma que solamente tomó las medidas de uno de los salones y que con ello calculó cuántos metros cuadrados debería pintar en los cinco locales. De acuerdo con el presupuesto que presentó el pintor, ¿cuál de los salones eligió para hacer sus cálculos? _____

Explica qué hiciste para responder esta pregunta. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 69

¡Esto sí está difícil!

1. Escribe en tu calculadora el número 2 y oprime la tecla [ENTER] o [EXE] (lo cual depende de cada modelo). Luego activa la función [ANS].

a) Escribe a continuación × 2 (o ANS × 2 si tu calculadora así lo requiere) y oprime la tecla [ENTER] O [EXE] cuatro veces. ¿Qué observas?_____

_____

_____

b) Borra todo, escribe el número 3 y oprime [ENTER]. Ahora introduce la expresión ANS + 2 y oprime [ENTER] cinco veces. ¿Qué observas? _____

_____

c) Explica lo que crees que hace la tecla [ANS]. _____

_____

_____

2. Usa la tecla ANS para producir las siguientes sucesiones numéricas. Escribe en cada línea la fórmula que construiste con la tecla ANS. Intenta construir más de una fórmula para cada sucesión.

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... FÓRMULA:	b) 100, 50, 25, 12.5, 6.25, 3.125, 1.5625, ... FÓRMULA:
c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... FÓRMULA:	d) 2, 4, 10, 28, 82, 244, 730, ... FÓRMULA:
e) 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, ... FÓRMULA:	f) –1, –3, –7, –15, –31, –63, –127, ... FÓRMULA:
g) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... FÓRMULA:	h) 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, ... FÓRMULA:
i) 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ... FÓRMULA:	j) 3, –3, 3, –3, 3, –3, 3, –3, ... FÓRMULA:

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

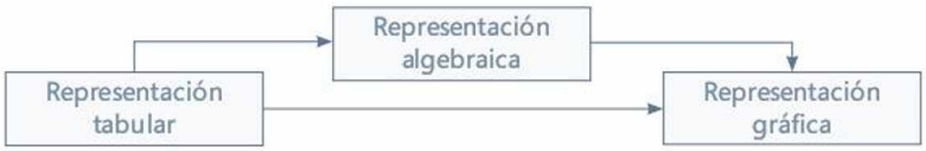
1. En la presentación de este bloque se mencionan los términos *incógnita* y *variable*. Indaga en fuentes bibliográficas matemáticas el significado de ambos términos y en qué se diferencian.
2. En la presentación de este bloque se hace referencia a las expresiones polinomiales. Indaga en fuentes bibliográficas matemáticas qué es una expresión polinomial y compara tus hallazgos con los de tus compañeros.
3. Indaga qué es un polinomio en una variable, cómo se determina el grado de un polinomio y cuáles deben ser las características de sus términos. Discute tus hallazgos con tus compañeros y proporciona ejemplos que los ilustren.
4. Haz un ensayo breve sobre tu experiencia al realizar las actividades de este bloque, destacando qué conocimientos previos te permitió fortalecer y el uso de los códigos aritmético y algebraico como lenguajes para comunicar ideas matemáticas.
5. Selecciona tres hojas de trabajo de este bloque que te parezcan interesantes para probarlas en el aula con alumnos de educación básica. Explica por qué seleccionaste esas hojas.

www.FreeLibros.me

BLOQUE 8

Introducción a la representación gráfica de funciones

En este bloque estudiaremos la representación gráfica de funciones lineales en el plano cartesiano. La construcción de gráficas es una extensión de lo que se ha realizado hasta el momento; se parte de una tabla de valores de entrada y salida para generar la expresión algebraica (fórmula) que corresponde a ese patrón numérico, y de esta manera construir su gráfica en la calculadora. El esquema siguiente muestra las tres formas de representación de una función.



La experiencia obtenida en los bloques anteriores permite establecer conexiones entre las representaciones algebraica, tabular y gráfica de una función, lo que favorece los procesos de traducción entre las representaciones y la formación del concepto de función.

Al igual que los valores numéricos, las literales y sus operaciones, el ambiente gráfico posee reglas y propiedades para su construcción, lectura e interpretación. El ingreso al ambiente gráfico de la calculadora requiere que el usuario se familiarice con sus componentes (plano, ejes cartesianos, cuadrantes, escala, etc.) desde su primera interacción con las gráficas.

Las actividades de este bloque incluyen una serie de cuestionamientos para la lectura e interpretación de las gráficas que se construyen en la calculadora, como: ¿qué regiones del plano ocupan?, ¿qué puntos importantes pueden destacarse?, ¿qué signos tienen las coordenadas?, ¿qué relación hay entre la expresión algebraica y la gráfica?

En esta propuesta de trabajo es importante la incorporación de la calculadora. Con un mínimo de instrucciones, la máquina despliega, de manera casi inmediata, una gráfica lista para su exploración con las herramientas de la calculadora. Por ejemplo, la herramienta TRACE permite recorrer la gráfica pasando por varios de sus puntos y muestra sus coordenadas. Asimismo, se propone la construcción de gráficas con lápiz y papel, lo que da paso a otro tipo de actividades que complementan las que se hicieron con la calculadora. La escritura de funciones en la calculadora se apega a la notación convencional ($y =$).

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 70

Patrones numéricos y gráficas

Valor de entrada	Valor de salida
1.5	3
2.1	4.2
3.9	7.8
4.2	8.4

Un estudiante creó una fórmula que produce los valores de salida de la tabla que está a la izquierda.

1. ¿Consideras que es fácil encontrar esa fórmula? _____

_____

Describe tu razonamiento _____

_____

2. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

3. Completa la siguiente tabla usando tu fórmula.

Valor de entrada	–1.5	–0.7	–0.2	0	0.2	0.8	1	1.5
Valor de salida								

4. Usa la expresión algebraica de tu fórmula para construir su gráfica (utiliza el editor de gráficas de tu calculadora). Anota en el siguiente recuadro la expresión que usaste para construirla.

$y =$

5. ¿Cómo describirías tu gráfica por teléfono para que otro estudiante haga una idéntica a la tuya?

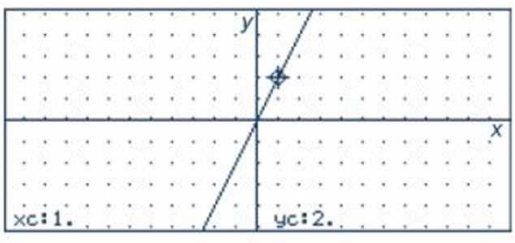
_____

_____

_____

_____

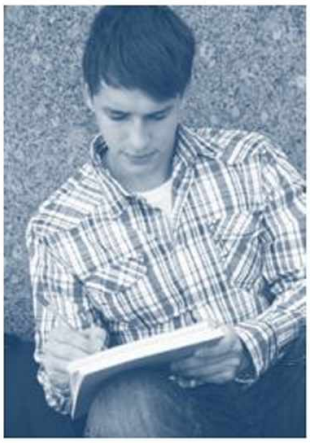
6. Usa la tecla TRACE de la calculadora para recorrer con el cursor la gráfica que construiste, como se muestra en la figura siguiente. De esta forma comprobarás si los valores de la tabla que completaste coinciden con las coordenadas de los puntos de la gráfica.



xc: 1 y *yc:* 2 son las coordenadas (1,2) del punto que se resalta en la gráfica.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 71



Patrones numéricos y coordenadas cartesianas

Valor de entrada	Valor de salida
2	1
3	1.5
5	2.5
7.2	3.6

Un estudiante creó una fórmula que produce los siguientes valores de salida.

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Ahora usa tu fórmula para completar la siguiente tabla.

Valor de entrada	–4.6	–3.4	–2	0	1.3	2.2	3	3.7
Valor de salida								

3. Utiliza el editor de gráficas de la calculadora para construir la gráfica que corresponde a tu fórmula y anota en el siguiente recuadro la expresión que usaste.

$y =$

4. Un estudiante dice que la gráfica que aparece en la calculadora es una línea. Describe lo más detalladamente posible cómo es esa línea, señalando las coordenadas de algunos de sus puntos que consideres importantes. _____

5. Comprueba si los valores de la tabla que llenaste coinciden con las coordenadas de los puntos de la gráfica. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica y luego encuentra el valor que le corresponde a y cuando $x = -1$ y escríbelo en este espacio: _____

¿Qué valor le corresponde a x cuando $y = 1.5$? _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 72

Ecuaciones lineales y sus gráficas

Valor de entrada	Valor de salida
1	1
1.8	1.8
3	3
4.7	4.7

Una estudiante creó una fórmula que produce los valores de salida que se muestran en la tabla.

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Utiliza tu fórmula para completar la siguiente tabla.

X	–2.3	–2	–0.9	0	0.5	1	1.8	3
Y								

3. Usa tu calculadora para construir la gráfica que corresponde a la ecuación que empleaste en tu fórmula y anótala en el siguiente recuadro.

$y =$

4. Un estudiante dice que esa gráfica no cruza el eje *y* ni el eje *x*.

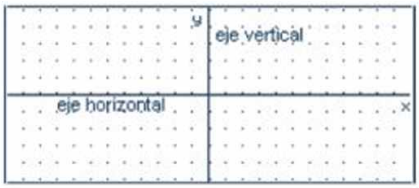
¿En qué crees que basa su afirmación? _____

_____

_____

_____

_____



5. Recorre con la tecla TRACE la gráfica que construiste.

¿Cuál es el valor de *x* cuando $y = 5.2$? _____

¿Cuál es el valor de *y* cuando $x = -7.1$? _____

6. Otro estudiante dice que para conocer el valor de *y* cuando $x = 345$ no necesita usar su fórmula ni recorrer la gráfica con TRACE. ¿Estás de acuerdo? _____

Justifica tu respuesta y anota el valor de *y*. _____

_____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 73

Inclinación de una recta en el plano cartesiano

Valor de entrada	Valor de salida
–0.5	–1.5
–2.2	–6.6
–4	–12
5.5	16.5

Un grupo de estudiantes construyó una fórmula que produce los valores de la tabla que está a la izquierdda.

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Completa la tabla siguiente utilizando tu fórmula.

x	2	1.5	1.3	1	–0.2	–0.7	–1.5	–2.2
y								

3. Con ayuda de tu calculadora, construye la gráfica que corresponde a tu fórmula y anota en el siguiente recuadro la expresión que usaste.

y =

4. Un estudiante dice que la gráfica que construyó en la calculadora está inclinada, de manera que la recta está más cerca del eje *X* que del eje *Y*.

¿Estás de acuerdo? _____

¿A qué crees que se deba? _____

_____

Comprueba tu respuesta. _____

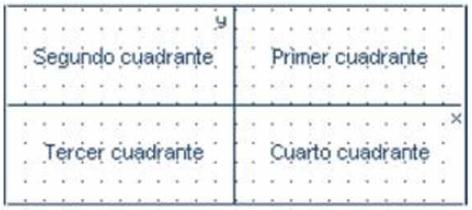
_____

5. ¿Qué signo tienen los valores de *x* y *y* en las coordenadas de los puntos de la gráfica del primer cuadrante? _____

_____

6. ¿Qué signos tienen las coordenadas de los puntos de la gráfica que están en el tercer cuadrante? _____

_____



www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 74

Ubicación de la recta en el plano cartesiano

Valor de entrada	Valor de salida
–7.5	–1.5
–10.5	–2.1
–22	–4.4
32.5	6.5

Una estudiante hizo una fórmula que produce los siguientes valores de salida.

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Completa la siguiente tabla utilizando tu fórmula.

x	–2.5	–2	–0.5	0	1.5	2	2.5	3
y								

3. Con ayuda de tu calculadora construye la gráfica que corresponde a tu fórmula y anota en el siguiente recuadro la expresión que usaste.

$y =$

4. ¿Cómo describirías por teléfono la gráfica que acabas de construir, para que otro estudiante haga una gráfica idéntica a la tuya? _____

5. Usa la tecla TRACE para recorrer la gráfica que construiste y contesta la siguiente pregunta: ¿En qué cuadrante está el punto (–3.5, –0.7)?, _____ ¿en cuál está el punto (4, 0.8)? _____

6. Un estudiante expresó que sólo necesita conocer las coordenadas de un punto para decir si ese punto está en el primer cuadrante o en el tercero. Encuentra cómo se puede hacer esto y explícalo de la manera más clara posible. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 75

Noción de crecimiento en una recta en el plano

Una estudiante creó una fórmula que produce los valores de salida que aparecen en esta tabla.

Valor de entrada	Valor de salida
2	–4
3	–6
4.5	–9
6	–12

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Completa la siguiente tabla utilizando tu fórmula.

x	–1.5	–1	–0.6	0	0.4	0.7	1	1.4
y								

3. Con ayuda de tu calculadora, construye la gráfica que corresponde a tu fórmula y anota en el siguiente recuadro la expresión que usaste.

$y =$

4. Un estudiante dice que cuando construye esta gráfica en su calculadora, "en vez de crecer, disminuye". ¿Por qué crees que suceda esto? _____

5. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica que construiste y comprueba que los valores de la tabla que completaste coinciden con las coordenadas de sus puntos.

6. ¿Qué signo tienen las coordenadas de los puntos de la gráfica que están en el segundo cuadrante?

7. ¿Qué signo tienen las coordenadas de los puntos de la gráfica que están en el cuarto cuadrante?

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 76

Rectas y cuadrantes del plano cartesiano

Una estudiante creó una fórmula que produce los valores de salida que aparecen en la tabla adjunta.

Valor de entrada	Valor de salida
–6	6
–9	9
13.7	–13.7
17	–17

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el recuadro.

2. Completa la siguiente tabla usando tu fórmula.

Valor de entrada	–1.5	–1	–0.6	0	0.4	0.7	1	1.4
Valor de salida								

3. Con ayuda de tu calculadora, construye la gráfica que corresponde a tu fórmula y anota en el siguiente recuadro la expresión que usaste.

$y =$

4. ¿Cómo describirías por teléfono a otro estudiante la gráfica que acabas de construir?

5. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica que construiste y comprueba que los valores de la tabla que completaste coinciden con las coordenadas de sus puntos.

6. Un estudiante dice que la gráfica pasa por el primero, segundo y tercer cuadrantes. ¿Por qué crees que sucede esto?

Escribe las coordenadas de tres puntos de la gráfica que ejemplifiquen tu respuesta.

7. ¿En qué cuadrante está el punto (–3, 3)?

¿En qué cuadrante está el punto (5, –5)?

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 77

Puntos relevantes en la gráfica de una ecuación lineal (1)

Una estudiante creó una fórmula que produce los siguientes valores de salida.

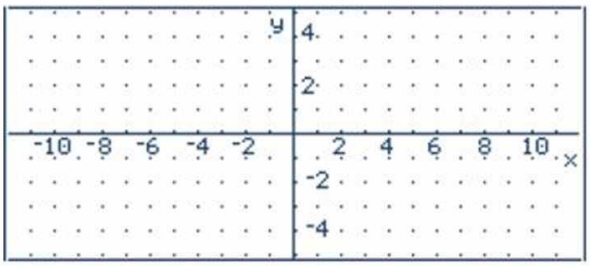
Valor de entrada	Valor de salida
–5	–4
–2	–1
–1.5	–0.5
1	2

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Completa la siguiente tabla usando tu fórmula.

Valor de entrada	–6	–4.5	–3	–1	–0.5	0	2.5	4
Valor de salida								

3. Utiliza los valores de la tabla para construir su gráfica en el siguiente plano cartesiano. Marca los puntos y después traza con lápiz la recta que pasa por ellos.



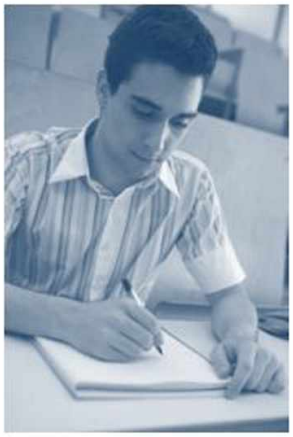
4. Ahora construye la gráfica en tu calculadora y compárala con la que trazaste con lápiz. Verifica que pasen por los mismos puntos.

5. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje vertical? _____(,).

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje horizontal? _____(,).

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 78



Puntos relevantes en la gráfica de una ecuación lineal (2)

Valor de entrada	Valor de salida
18.3	6.1
15.9	5.3
9.6	3.2
–24	–8

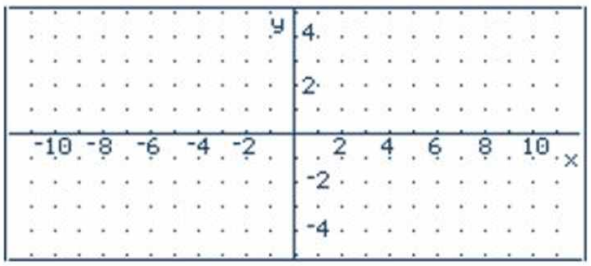
Un estudiante construyó una fórmula que produce estos valores de salida.

1. Encuentra la fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora . Anótala en el siguiente recuadro.

2. Completa la siguiente tabla usando tu fórmula.

Valor de entrada	–10.5	–9	–3	0	1	3	9	10.5
Valor de salida								

3. Utiliza los valores de la tabla para construir su gráfica en el siguiente plano cartesiano. Marca los puntos y después traza con lápiz la recta que pasa por ellos.



4. Ahora construye la gráfica en tu calculadora y compárala con la que trazaste con lápiz. Verifica que pasen por los mismos puntos.

5. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica.

¿Qué valor tiene x cuando $y = 4$? _____

¿Qué valor tiene y cuando $x = 21$? _____

¿Qué valor tiene x cuando $y = 0$? _____

6. Un estudiante dice que esa gráfica no pasa por el punto 2.7, 0.9. ¿Estás de acuerdo ? _____

Explica claramente tu respuesta. _____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 79

Iniciación a la lectura de gráficas de funciones lineales

Un estudiante creó una fórmula que produce los siguientes valores de salida.

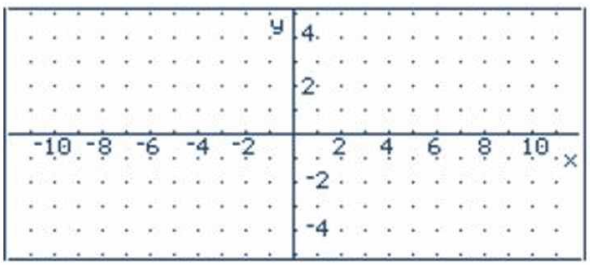
Valor de entrada	Valor de salida
1	3
2	5
3	7
–2	–3

1. Encuentra esa fórmula y compruébala con ayuda de tu calculadora. Anótala en el siguiente recuadro.

2. Completa la siguiente tabla usando tu fórmula.

Valor de entrada	–2.5	–1	–0.5	0	0.5	1.2	1.5	2
Valor de salida								

3. Utiliza los valores de la tabla para construir su gráfica en el siguiente plano cartesiano. Marca los puntos y después traza con lápiz la recta que pasa por ellos.



4. Ahora construye la gráfica en tu calculadora y compárala con la que trazaste con lápiz. Verifica que pasen por los mismos puntos.

5. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica.

¿Qué valor tiene x cuando $y = -17$? _____

¿Qué valor tiene y cuando $x = 0$? _____

¿Qué valor tiene x cuando $y = 0$? _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 80

Ecuaciones lineales y coordenadas en el plano

Valor de entrada	Valor de salida
–34	
–23	–25
16	
8	

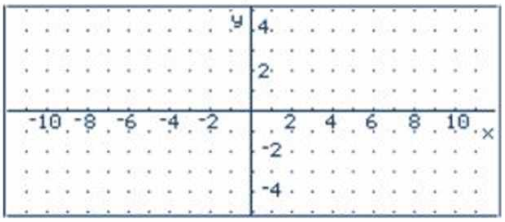
Una estudiante construyó una gráfica usando la ecuación $y = x - 2$.

1. Con esa información, encuentra los valores que faltan en la tabla.

2. Completa la siguiente tabla usando la ecuación.

Valor de entrada	–7	–6	–3.5	0	0.5	2.5	5.5	6.5
Valor de salida								

3. Utiliza los valores de la tabla para construir su gráfica en el siguiente plano cartesiano. Marca los puntos y después traza con lápiz la recta que pasa por ellos.



4. Construye también la gráfica en tu calculadora, y compárala con la que trazaste con lápiz. Verifica que pasen por los mismos puntos.

5. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje *y*? _____ (,)

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje *x*? _____ (,)

7. A continuación se proporcionan las coordenadas de varios puntos. Anota por cuáles pasa la gráfica que construiste y por cuáles no y explica por qué.

(5, 3) (–3, –5) (1, –4) (2, –4) (1, –1)

La gráfica pasa por estos puntos:

(,) (,) (,)

Explicación. _____

_____

_____

La gráfica no pasa por estos puntos:

(,) (,) (,)

Explicación. _____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 81

Los puntos de la gráfica de una ecuación lineal (1)

Valor de entrada	Valor de salida
9	
7	
3	
–1	

Un estudiante usó la ecuación $y = 3 - x$ para crear una gráfica.

1. Con esa información, encuentra los valores que faltan en la tabla.

2. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = 3 - x$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en donde la gráfica corta el eje *Y*? _____

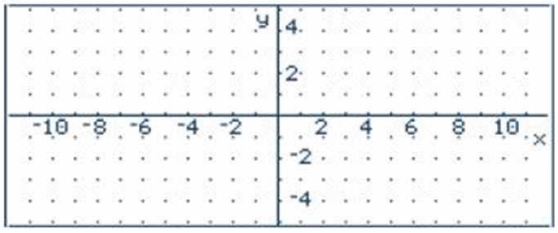
_____

_____

3. Completa la siguiente tabla usando la ecuación.

Valor de entrada	–2	–1.5	–0.5	0	1.5	3	4.5	8
Valor de salida								

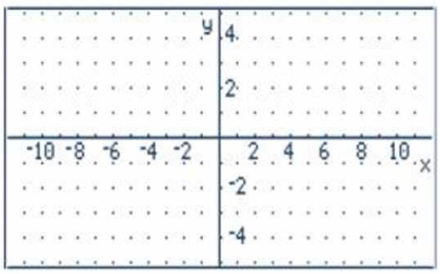
4. Utiliza los valores de la tabla para construir su gráfica en el siguiente plano cartesiano. Marca los puntos y después traza con lápiz la recta que pasa por ellos.



5. Construye también la gráfica en tu calculadora y compárala con la que trazaste con lápiz. Verifica que pasen por los mismos puntos.

6. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica. Anota las coordenadas de 5 puntos que no estén en la tabla que completaste y marca los puntos en el plano de la derecha. Indica cada punto con la letra que le corresponda.

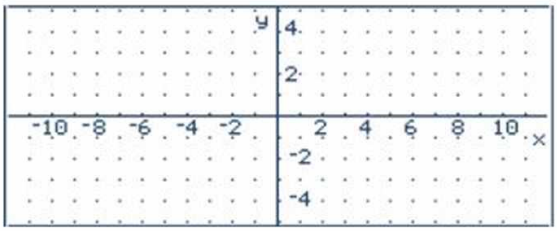
A	B	C	D	E
(,)	(,)	(,)	(,)	(,)



www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 82

Rectas paralelas en el plano cartesiano



1. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = 1 - 3x$, y dibújala tan fielmente como te sea posible en el siguiente plano.

2. Completa la siguiente tabla usando la ecuación anterior.

Valor de entrada	7	6	3	2	0	–1	–3	–5	–8	–10
Valor de salida										

3. Un compañero que no está viendo la gráfica te pide que la describas. Hazlo con la mayor precisión.

_____

4. ¿Qué signo tiene cada coordenada de los puntos de la gráfica que están en el tercer cuadrante?

_____

5. ¿Qué signo tiene cada coordenada de los puntos de la gráfica que están en el cuarto cuadrante?

_____

Un estudiante de otra escuela construyó dos gráficas usando las siguientes ecuaciones.

$y = 2 - 3x$ $\qquad$ $y = -1 - 3x$

Afirma que estas gráficas cortan los ejes *Y* y *X* en puntos distintos a los que los corta la gráfica que construiste en el punto 1.

6. ¿Estás de acuerdo? _____

Explica claramente tu respuesta. _____

_____

_____

_____

7. Cubre la pantalla de la calculadora con rectas paralelas como las tres anteriores.

Explica claramente el procedimiento que utilizaste. _____

_____

_____

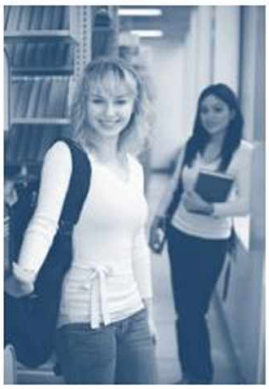
_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 83



Rectas horizontales (1)

Valor de entrada	Valor de salida
–7	2
–4	2
–1	2
0	2
6	2
11	2

Una estudiante construyó una fórmula que produce los valores de salida que se muestran en la tabla que está a la izquierda.

1. Encuentra esa fórmula y anótala en el siguiente recuadro.

2. Explica claramente tu razonamiento. _____

_____

3. Completa la siguiente tabla usando la fórmula que encontraste.

Valor de entrada	–11	–9	–6	–2	1	5	8	10
Valor de salida								

4. Construye una gráfica en tu calculadora, usando la fórmula que encontraste. Anota en el siguiente espacio la expresión que utilizaste.

$y =$

5. Ahora dibuja en este plano cartesiano la gráfica que construiste.

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en el que la gráfica que construiste en tu calculadora corta el eje *Y*? _____ (,)

7. ¿La gráfica que construiste cortará en algún punto el eje *X*? _____

Describe tu razonamiento tan claramente como sea posible. _____

_____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 84

Rectas horizontales (2)

Valor de entrada	Valor de salida
–5	–3.5
–2	–3.5
–1	–3.5
8	–3.5
10	–3.5
13	–3.5

Dos estudiantes hicieron una fórmula que produce los siguientes valores de salida.

1. Encuentra esa fórmula y anótala en el siguiente recuadro.

2. Explica claramente tu razonamiento para encontrarla. _____

_____

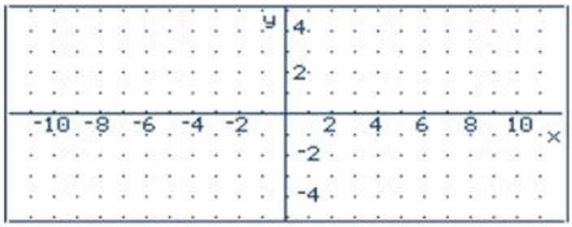
3. Completa la siguiente tabla usando la fórmula que encontraste.

Valor de entrada	–10	–8.5	–4.5	–0.5	0	5.5	7	11
Valor de salida								

4. Construye en tu calculadora una gráfica usando la fórmula que encontraste y escribe en la línea la expresión algebraica que utilizaste. _____

_____

5. Dibuja esa gráfica en el siguiente plano cartesiano.



6. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica. Anota las coordenadas de 5 puntos por los que pase la gráfica pero que no coincidan con los de las dos tablas anteriores.

A	B	C	D	E
(,)	(,)	(,)	(,)	(,)

7. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 45679$? _____ ¿Cuando $x = -23587$? _____

¿Cuál es el valor de x cuando $y = -3.5$? _____

¿Cuál es el valor de x cuando $y = 3.5$? _____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. En las actividades de este bloque se usan los términos "fórmula" y "ecuación", indica las diferencias en el significado de estos términos. Analiza tu respuesta con el profesor y tus compañeros.
2. Al inicio de este bloque se menciona el término "función", indaga en fuentes bibliográficas acerca de este concepto e indica la diferencia entre función, fórmula y ecuación.
3. Indica en qué orden aparecen las funciones ($y = 2x$, $y = x$, ...) en las hojas de trabajo de este bloque; analiza su estructura y discute con tus compañeros la razón de ese orden. Llegado el caso, cuestiona qué modificaciones o agregados se propondrían para trabajar con este material aplicándolo a estudiantes de educación básica.
4. Identifica los contenidos matemáticos de las actividades de este bloque y elabora un esquema de conexiones que los relacionen.
5. En la presentación del bloque se menciona la construcción, lectura e interpretación de gráficas de funciones. Describe en qué consiste cada una de estas tareas y cuál es su rol en el aprendizaje de la noción de ecuación. De ser necesario, realiza una investigación al respecto.
6. Identifica en las hojas de trabajo tres ejemplos de cada una de las tareas mencionadas en el punto anterior, y elabora una presentación empleando ejemplos propios.
7. Construye tres fórmulas para las coordenadas de cada uno de los siguientes incisos , con sus respectivas tablas, las cuales produzcan rectas que pasen cada una por todos esos puntos.
   a) (3, 0)
   b) (0, –2)
   c) (–4, –3)
   d) (–2, –5) y (1, 4)
   e) (0, 0), (3, 5) y (7, 10)
8. ¿En qué incisos del punto anterior no fue posible encontrar tres rectas? Explica por qué, utilizando argumentos matemáticos.
9. En el bloque se utiliza constantemente la representación de coordenadas. ¿Por qué consideras que es importante? ¿De qué aspectos depende su adecuada construcción, lectura e interpretación?
10. Realiza una investigación en diferentes fuentes con la cual puedas establecer bases para responder la siguiente pregunta: ¿De qué manera contribuyen las actividades de este bloque en el desarrollo del concepto *función*?

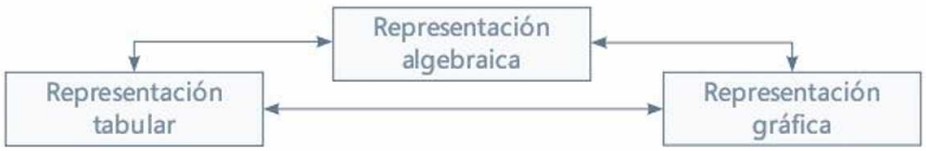
www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

BLOQUE 9

Introducción a la representación gráfica de funciones cuadráticas

En este bloque se introduce la representación gráfica de las funciones cuadráticas, una parábola. Se acude a otras representaciones (tablas y ecuaciones) para abordar la actividad central de este bloque, la cual consiste en la construcción y análisis de gráficas de parábolas con distintas características con la ayuda de la calculadora gráfica. El siguiente esquema ilustra los procesos de construcción que se inducen en las actividades y que corresponden a las tres formas de representación de una función.



Las hojas de trabajo de este bloque contienen una serie de actividades que promueven la lectura e interpretación de las gráficas. En ellas se induce el estudio de temas relacionados con la función cuadrática a partir de la exploración de parábolas "dinámicas" creadas con la calculadora. Las actividades se centran en una exploración guiada que conduce al estudiante de manera intuitiva hacia un estudio más profundo de los aspectos importantes de la parábola: los puntos en que corta los ejes cartesianos; sus valores extremos (mínimo o máximo); la traslación vertical de la gráfica, y los parámetros del crecimiento de la gráfica de una parábola y su simetría. Las funciones que se emplean en este bloque son de la estructura $f(x) = ax^2$ y $f(x) = ax^2 + c$.

La calculadora facilita la construcción de gráficas en forma casi instantánea, y la herramienta TRACE permite recorrerlas proporcionando las coordenadas de los puntos que el cursor identifica. Aun cuando la máquina posee herramientas que determinan automáticamente los cruces de la gráfica con los ejes cartesianos, los valores mínimo y máximo, y otros puntos más, recomendamos que el futuro docente desarrolle estrategias que le permitan explicar los resultados que produce la calculadora de manera automática.

Entre otras cosas, el estudio de la parábola en el plano cartesiano amplía el horizonte de las representaciones gráficas de una función cuadrática.

www.FreeLibros.me

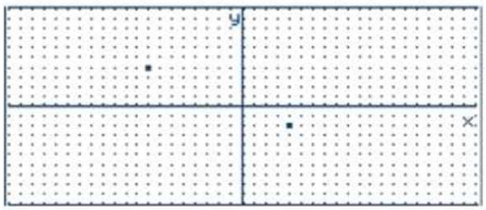
Hoja de trabajo 85

Dos puntos determinan una recta

1. Completa la siguiente tabla.

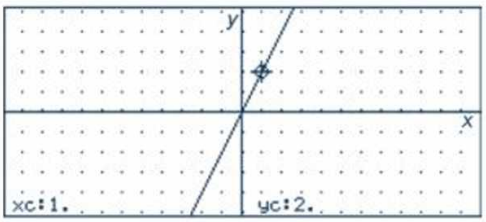
Valor de entrada	–20	–16			0	4	9	12		
Valor de salida	10		6.5	4	0	–2	–4.5		–9	–10

2. Marca los puntos correspondientes a las parejas de valores de la tabla anterior en el siguiente plano y traza con un lápiz la gráfica que pasa por esos puntos.



3. Construye en tu calculadora la gráfica que trazaste y anota en el recuadro la ecuación que hayas utilizado.

$y =$



4. Un estudiante dice que no es necesario marcar todos los puntos que se obtienen con los valores de la tabla, y que sólo basta marcar dos puntos para trazar la misma gráfica (como en la figura). ¿Estás de acuerdo? _____

Fundamenta tu respuesta. _____

_____

_____

_____

_____

5. Construye en la calculadora la recta que pasa por los puntos (–2, 0) y (4, 6).
Anota en el recuadro la ecuación que usaste y explica con detalle qué hiciste para encontrarla.

$y =$

_____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 86

¿Cuáles puntos están en una recta?

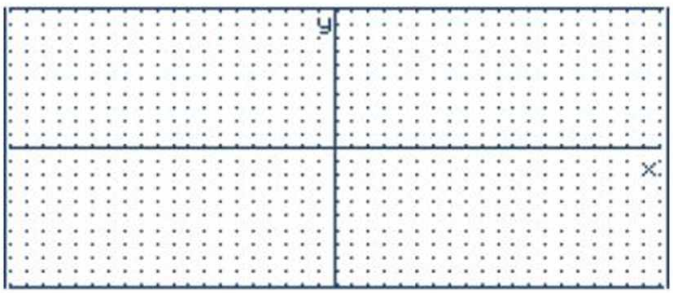
1. Construye una ecuación que produzca una recta y anótala en el recuadro.

$y =$

2. Llena la tabla siguiente utilizando la ecuación que construiste.

Valor de entrada										
Valor de salida										

3. Marca los puntos correspondientes a las parejas de valores de la tabla anterior y traza con un lápiz la gráfica que pasa por esos puntos.



4. Construye en tu calculadora la gráfica que trazaste.

5. Una estudiante dice que el punto cuyas coordenadas son (20, 39) está en la gráfica que construiste. ¿Estás de acuerdo? _____

Fundamenta tu respuesta. _____

_____

_____

6. Completa las siguientes coordenadas de tal manera que correspondan a puntos que pertenecen a la gráfica que construiste.

a. (–4,) b. (,6) c (3.5,) b. (,15)

Indica qué estrategia usaste para completar las coordenadas. _____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 87

Otro tipo de ecuaciones

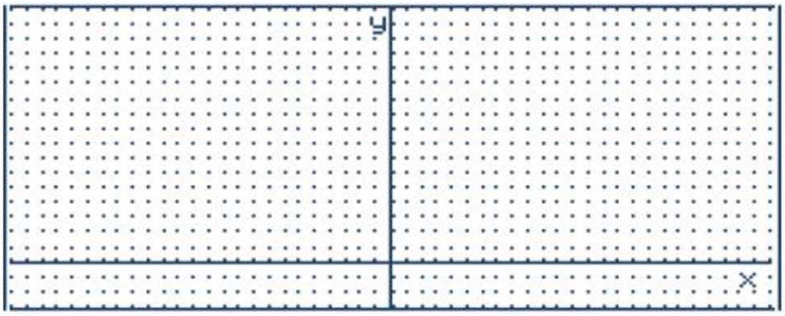
1. Completa la siguiente tabla.

Valor de entrada	6	5	3	2	1	0	–3	–4	–5	–6
Valor de salida	35		8		0			15		

2. Escribe en tu calculadora la ecuación que usaste para completar la tabla y anótala en el recuadro.

3. Construye en tu calculadora la gráfica correspondiente y comprueba que contenga los puntos que se muestran en la tabla. La gráfica que construiste se llama *parábola*.

4. Reproduce en el siguiente plano cartesiano la gráfica que hiciste en la calculadora. Auxíliate con los valores de la tabla.



5. Indica claramente cómo describirías por teléfono la gráfica que acabas de construir para que otro estudiante haga una gráfica idéntica a la tuya. _____

_____

_____

_____

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta el eje *y*? _____

7. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta el eje *x*? _____

8. ¿Cuántas veces corta la gráfica el eje *x*? _____

9. ¿Y cuántas veces corta el eje *y*? _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 88

Otro tipo de gráficas

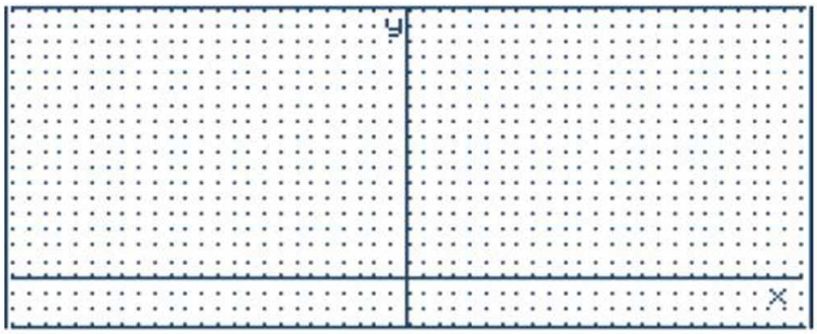
1. Completa la siguiente tabla usando una fórmula que satisfaga lo siguiente: *el cuadrado del valor de entrada aumentado en una unidad.*

Valor de entrada	–4	–3.5	–3	–1	0	1	2	3	3.5	4
Valor de salida	17		10		1		5			

2. Construye en tu calculadora la gráfica que corresponda a esa fórmula y anota en el recuadro la ecuación que utilizaste.

$y =$

3. Marca los puntos que corresponden a las parejas de valores de la tabla anterior y traza con lápiz la gráfica que pasa por esos puntos.



4. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener *y*? _____

¿A qué se debe? _____

_____

_____

5. ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la gráfica? _____

6. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener *x*? _____

7. ¿Cuál es su valor máximo? _____

8. ¿Cuál es el signo para todos los valores de *y*? _____ ¿A qué se debe? _____

_____

¿Cuántas veces corta la gráfica al eje *y*? _____ ¿Y al eje *x*? _____

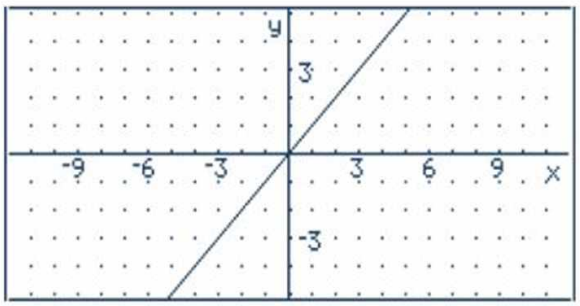
www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 89

De rectas a sus ecuaciones

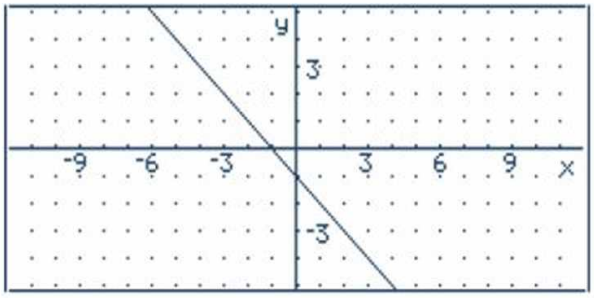
1. Encuentra las ecuaciones que corresponden a las siguientes gráficas. Comprueba tus respuestas en la calculadora y explica cómo encontraste cada ecuación.

a)



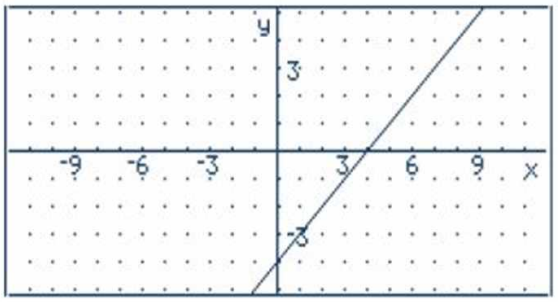
$y =$ _____

b)



$y =$ _____

c)



$y =$ _____

www.FreeLibros.me

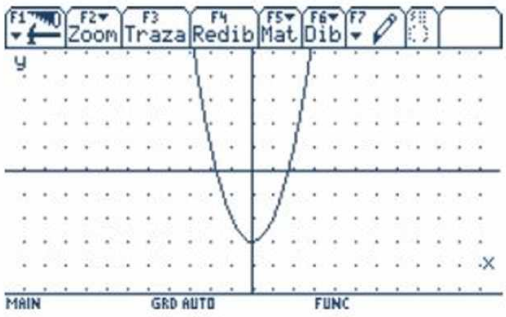
Hoja de trabajo 90

De parábolas a sus ecuaciones

Un estudiante construyó las tres gráficas que se presentan a continuación.

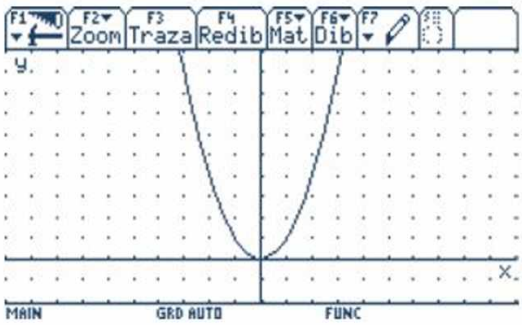
1. Encuentra las ecuaciones que las generaron y anótalas en el espacio correspondiente. Construye cada una de las gráficas en tu calculadora para verificar tus respuestas y explica tu razonamiento para encontrarlas. Considera que en los ejes cartesianos la escala es de 1.

a)



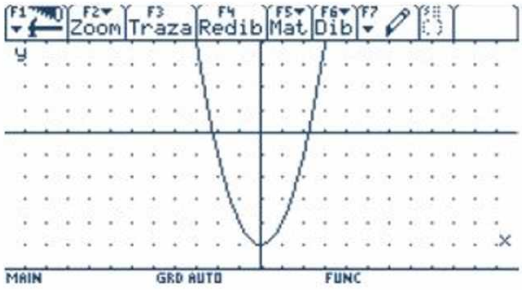
$y =$ _____

b)



$y =$ _____

c)



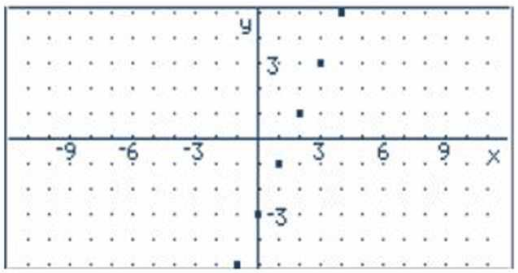
$y =$ _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 91

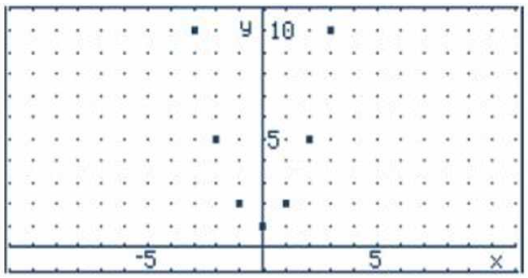
Puntos y ecuaciones (1)

1. Completa las tablas siguientes usando la información que proporcionan los puntos marcados en el plano cartesiano. Construye en tu calculadora cada una de las gráficas que pasan por esos puntos y anota en el recuadro correspondiente la ecuación que utilizaste en cada caso.



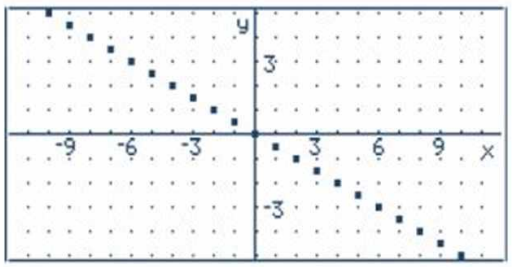
Valor de entrada	Valor de salida

$y =$



Valor de entrada	Valor de salida

$y =$



Valor de entrada	Valor de salida

$y =$

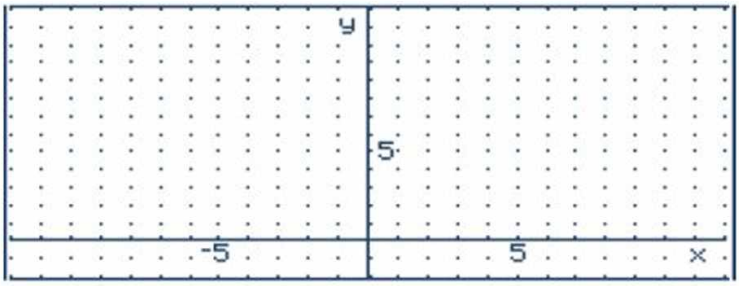
www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 92

Puntos y ecuaciones (2)

1. Marca en el siguiente plano los puntos que corresponden a las coordenadas que se dan y traza con un lápiz la gráfica que pasa por ellos.

(3, 12)	(2.5, 9.25)	(2, 7)	(1.5, 5.25)	(0, 3)
(–1, 4)	(–0.5, 3.25)	(–2, 7)	(–2.5, 9.25)	(–3, 12)



2. Escribe en la línea la ecuación que produce la gráfica que trazaste. _____

3. Construye la gráfica en tu calculadora y compárala con la que trazaste. En la gráfica, ¿cuál es el valor de *y* cuando *x*=4? _____

4. ¿Puede *x* tomar el valor –8? _____
Fundamenta tu respuesta. _____
_____
_____

5. ¿Puede *y* tomar el valor cero? _____
Fundamenta tu respuesta. _____
_____
_____

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta el eje *Y*? _____

7. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta el eje *X*? _____

8. ¿Qué le puedes agregar a la ecuación para que la gráfica corte en un punto el eje *X*?
_____
Anota cómo queda la ecuación. _____

9. ¿Qué le puedes agregar a la ecuación para que la gráfica corte el eje *X* en dos puntos?
_____
Anota cómo queda la ecuación. _____

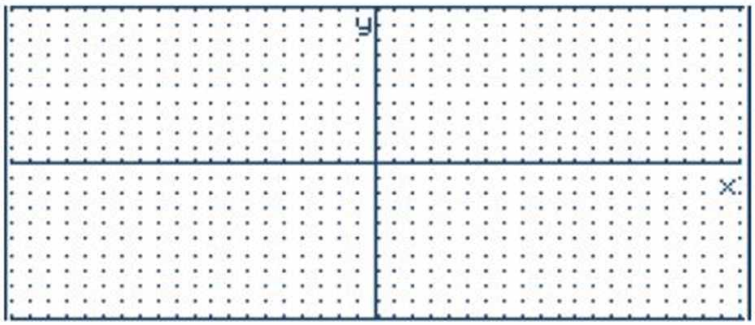
www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 93

¿Entre dos puntos hay otro punto?

1. Construye en tu calculadora la gráfica que corresponde a la tabla siguiente y dibújala a lápiz en el plano cartesiano.

Valor de entrada	–14	–12	–3.5	0	7	15
Valor de salida	–42	–36	–10.5	0	21	45



2. Anota las coordenadas de otros cinco puntos de la gráfica. _____

_____

_____

3. Completa las siguientes coordenadas de puntos que aparecen en la gráfica que construiste.

a. (0.14,) b. (5.017,) c. (–1.7013,)

4. De la gráfica que construiste, selecciona tres puntos que estén entre los puntos (–1, –3) y (0.5, 1.5). Escribe en los paréntesis siguientes las coordenadas de los puntos que elegiste.

(,) (,) (,)

5. Escribe las coordenadas de tres puntos que estén entre (3, 9) y (1.5, 4.5).

(,) (,) (,)

6. ¿Qué estrategia seguiste para solucionar los puntos 2, 3 y 4? _____

_____

_____

_____

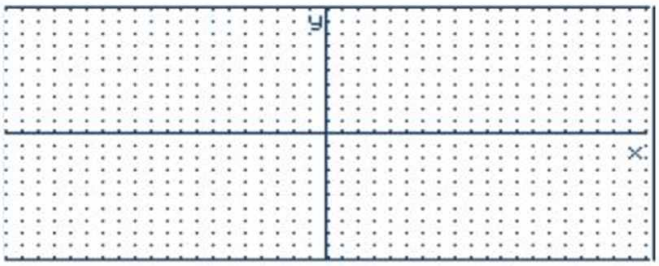
_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 94

Vértice de la parábola (1)

1. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 1.5$ y reprodúcela en el siguiente plano.



2. Una estudiante dice que los puntos (–2, –5.5) (0, 1.5) (–0.5, 1.75) y (0.1, 1.6) están en la gráfica que construiste. Revisa las coordenadas y tacha aquellas con las que no estés de acuerdo. De ser el caso, explica por qué tachaste cada una. _____

_____

_____

3. En la gráfica que construiste, ¿hay puntos entre (3, –1) y (3.1, –1.1)? _____

4. Anota tres ejemplos: _____

_____

_____

5. ¿La gráfica que construiste alcanza un valor máximo o mínimo para *y*?
Fundamenta tu respuesta. _____

6. ¿Cuál es el valor máximo o mínimo para *y*? _____

7. Anota las coordenadas de tres puntos que estén ubicados justo antes de que la gráfica alcance su valor extremo. _____
¿Cómo cambian los valores de *y*? _____

8. Anota las coordenadas de tres puntos consecutivos que estén ubicados justo después de que la gráfica alcance su valor máximo. _____
¿Cómo cambian los valores de *y*? _____

9. ¿Qué relación hay entre lo observado en los puntos 7 y 8 y que la gráfica alcance un valor máximo o mínimo? _____

_____

_____

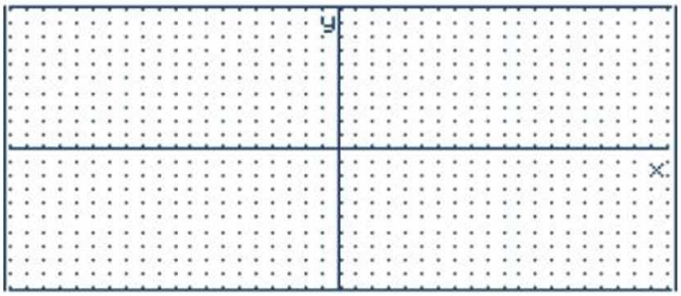
El punto que corresponde al valor mínimo o máximo de la parábola se llama *vértice*.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 95

Vértice de la parábola (2)

1. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = -x^2 + 6$ y trázala a lápiz en el plano siguiente.



2. ¿La gráfica que construiste alcanza un valor máximo o mínimo para *y*? _____
Fundamenta tu respuesta. _____

3. ¿Cuál es el valor máximo o mínimo para *y*? _____

4. Anota las coordenadas de tres puntos que estén ubicados justo antes de que la gráfica alcance un valor extremo. _____
¿Cómo cambian los valores de *y*? _____

5. Anota las coordenadas de tres puntos que estén ubicados justo después de que la gráfica alcance un valor extremo. _____
¿Aumentan o disminuyen los valores de *y*? _____

6. ¿Qué relación hay entre lo observado en los dos apartados anteriores y que la gráfica tenga un valor extremo? _____

7. Construye en la calculadora una parábola cuyo valor máximo sea –2.
Escribe la ecuación que usaste. _____

8. Construye ahora una parábola cuyo valor mínimo sea 0.5.
Escribe la ecuación que usaste. _____

9. ¿Cuál es el valor máximo en la gráfica de $y = -x^2$?
Fundamenta tu respuesta. _____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 96

Parábolas y traslaciones en el plano

1. Construye en la calculadora la gráfica de la ecuación $y = 3x^2$.

2. ¿Esta gráfica es igual a las que has trazado antes? _____
Si hay alguna diferencia, ¿en qué consiste? _____
_____
_____
_____

3. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = 3x^2 + 1.5$. ¿En qué se diferencia esta gráfica de la que construiste al inicio? _____
¿A qué se debe? _____

4. Un estudiante construyó la gráfica de la ecuación $y = -2 + 3x^2$, y dice que se obtiene la misma gráfica que produce la ecuación $y = 3x^2 - 2$. ¿Estás de acuerdo? _____
Fundamenta tu respuesta. _____
_____
_____

5. Contesta las siguientes preguntas usando la información de la gráfica de $y = 3x^2 + 1$.

¿Qué valor le corresponde a y cuando $x = -1.5$? _____
¿Qué valor le corresponde a y cuando $x = 1.5$? _____
¿Cómo son entre sí los valores de y en las dos preguntas anteriores? _____
¿A qué crees que se deba esto? _____
_____
_____

6. Utiliza la tecla TRACE para recorrer la gráfica y encuentra parejas de puntos en los que el valor de x sea distinto pero que el de y sea el mismo. Anota tres ejemplos en los siguientes espacios.

(,) (,) (,) (,) (,) (,)

7. Encuentra una relación entre el vértice de la parábola y puntos como los que se encontraron en el punto anterior. Describe claramente esa relación. _____
_____
_____
_____
_____
_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 97

¿Qué modifica estas parábolas?

1. Usa la ecuación $y = 2x^2 + 1$ para completar la siguiente tabla.

Valor de entrada	5	4.5	1	0	–1.5	–2	–2.5	–3.8
Valor de salida								

2. Construye en tu calculadora la gráfica de esta ecuación.

3. Al recorrer la gráfica con la tecla TRACE, un estudiante notó que cuando $x = 0$, $y = 2$.

¿Estás de acuerdo? _____

Explica tu respuesta. _____

4. Otro estudiante dice que al usar la tecla TRACE encuentra que si $y = –2$, $x = 0.5$.

¿Estás de acuerdo? _____

Fundamenta tu respuesta. _____

_____

_____

5. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$.

6. ¿En qué es distinta la gráfica que construiste al inicio, respecto de esta última? _____

¿A qué crees que se debe esta diferencia? _____

_____

_____

7. Construye en la calculadora la gráfica de la ecuación $y = 5x^2 + 1$

8. ¿En qué es distinta la gráfica que acabas de construir, respecto de las que trazaste anteriormente?

_____

_____

9. ¿A qué crees que se deba esta diferencia? _____

_____

_____

10. Respecto de la gráfica de $y = x^2$, ¿cómo son las que resultan cuando multiplicas x^2 por números mayores que 1? _____

_____

11. Respecto de la gráfica de $y = x^2$, ¿cómo son las que resultan cuando multiplicas x^2 por números entre cero y 1? _____

_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 98

Reflexión de una parábola

1. Construye en tu calculadora la gráfica de la ecuación $y = -3x^2+2$.
2. Ahora construye la gráfica de la ecuación $y = 3x^2 + 2$.
3. ¿En qué son diferentes las gráficas que acabas de construir? _____

_____

4. ¿A qué crees que se deban estas diferencias? _____

_____

5. Construye en tu calculadora otro par de gráficas que presenten la misma diferencia que las dos gráficas anteriores. Anota en los recuadros las funciones que utilizaste.

$y =$	$y =$

6. Construye la gráfica de $y = -6x^2 +2$. ¿En qué es diferente esa gráfica de la del enunciado 1?_____
   ¿A qué se debe esta diferencia? _____

_____

7. Construye en tu calculadora otras dos gráficas que presenten el mismo tipo de diferencia que en el punto 3. Anota las funciones que usaste. _____

_____

8. Construye la gráfica de $y = -0.25x^2 + 2$.

   ¿En qué se diferencia esta gráfica respecto de las anteriores? _____

_____

   ¿A qué crees que se deba esta diferencia? _____

_____

9. Construye en la calculadora otras dos gráficas que presenten el mismo tipo de diferencia, como la del punto 6. Anota las funciones que usaste. _____

_____

10. Un estudiante dice que la gráfica de $y = -3x^2 -20$ no existe, porque al construirla en la calculadora no aparece; ¿estás de acuerdo? _____
    Fundamenta tu respuesta._____

_____

_____

_____

_____

www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. Revisa las hojas de trabajo de este bloque; luego escribe un breve ensayo acerca de su pertinencia para el tema central y ofrece sugerencias. Preséntalo en tu clase.
2. Selecciona algunas actividades de las hojas de trabajo de este bloque y elabora un plan de clase. Discútelo con tus compañeros. Atiende las observaciones que te hagan y haz los ajustes necesarios.
3. Identifica los contenidos matemáticos que se abordan en las hojas de trabajo y elabora un mapa conceptual.
4. Describe con detalle qué procedimientos puedes utilizar para encontrar lo que se indica a continuación. Compara tus propuestas con las de tus compañeros.
   a. El punto por el que una parábola cruza el eje *Y*.
   b. El o los puntos en que una parábola corta el eje *X*. Considera también el caso en que la parábola no corte el eje *X*.
   c. Las coordenadas del punto donde una parábola tiene un mínimo o un máximo.
   d. Las coordenadas del vértice de la parábola a partir de las cuales conoces su ecuación.
5. Investiga en algunos libros de matemáticas cuáles son los procedimientos formales para encontrar lo que se pide en el punto 4. Compara los resultados de tu consulta, con la experiencia y conocimientos que desarrollaste al realizar las actividades de este bloque.
6. Explora las herramientas del ambiente gráfico de tu calculadora y elabora una secuencia didáctica para el tema de funciones cuadráticas en la que se utilicen algunas de estas herramientas.

www.FreeLibros.me

Bloque 10

Puntos en el plano cartesiano

Presentación

Propósitos centrales de las actividades de este bloque:

- Profundizar en el estudio del plano cartesiano.
- Construir gráficas de puntos.
- Estudiar algunas transformaciones en el plano.
- Utilizar fórmulas para realizar transformaciones en el plano.

Este bloque continúa con el estudio del plano cartesiano; el concepto de *punto* es el elemento básico cuya principal característica es su ubicación en el plano mediante coordenadas. También se aborda el estudio de conjuntos de puntos que satisfacen una determinada relación, como la recta y el círculo, y sus transformaciones en el plano.

El uso de una calculadora gráfica favorece el estudio de los temas de este bloque de actividades, pues facilita el ajuste dinámico de los rangos y escala de los ejes cartesianos; los ambientes para construir tablas usando las coordenadas de los puntos y a partir de gráficas; la posibilidad de operar entre las columnas de las tablas, y la traducción inmediata entre las representaciones tabular y gráfica.

Las actividades de este bloque favorecen la creatividad y originalidad en los estudiantes, ya que no es necesario limitar el trabajo a las gráficas de puntos que se proponen aquí.

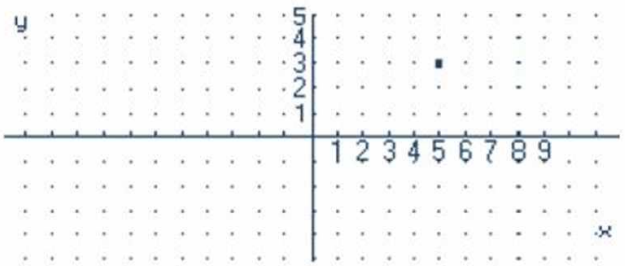
www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 99

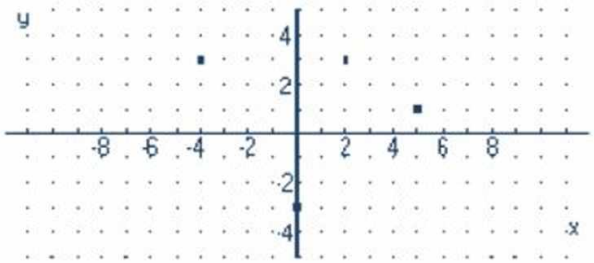
Puntos en el plano

1. Con el graficador de puntos de tu calculadora realiza las siguientes actividades. Si no sabes cómo usarlo, consulta las instrucciones en el *Manual básico* de este libro.

Para localizar puntos en un plano se usa una pareja de números; por ejemplo: (5, 3), la cual indica a la calculadora el lugar exacto donde debe imprimir un punto, como a continuación se muestra .



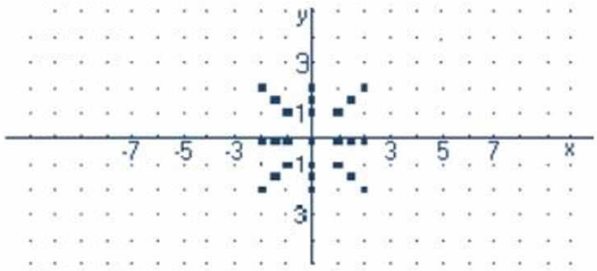
La siguiente figura muestra los puntos A = (2, 3), B = (5, 1), C = (0, –3) y D = (–4, 3). Las parejas de números se denominan **coordenadas** de un punto.



2. Escribe cerca de cada punto de la gráfica la letra que le corresponde.

3. Marca en la gráfica los siguientes puntos: F = (7, 0), G = (0, 2), H = (2, 0) y J = (–4, –3.5).

4. Reproduce en tu calculadora la gráfica siguiente. No es necesario poner la cuadrícula y las marcas en los ejes; lo importante es que los puntos que construyas estén ubicados en el plano, como los que se muestran en la gráfica. Escribe en las líneas las parejas de números que usaste para construir tu gráfica. _____



_____

_____

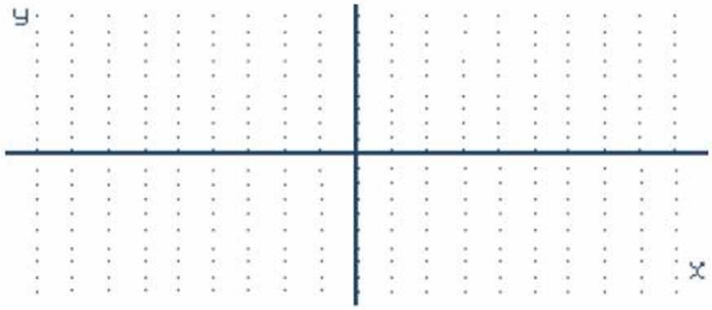
_____

www.FreeLibros.me

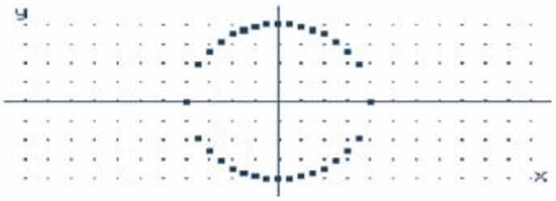
Hoja de trabajo 100

Dibujando con puntos

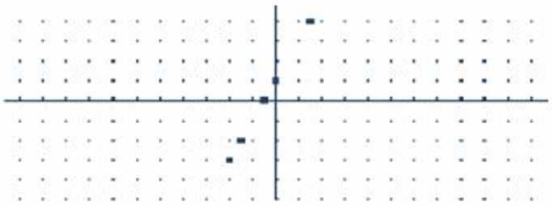
1. Utiliza la cuadrícula para hacer a lápiz un dibujo propio que contenga por lo menos 20 puntos. Después reprodúcelo en tu calculadora y muéstralo a la clase.
2. Escribe la lista de las parejas de números que usaste para construir los puntos con que diseñaste tu dibujo.



3. Construye en tu calculadora una gráfica idéntica a la que se muestra en la figura contigua. Escribe en las líneas las parejas de números que usaste para construir tu gráfica.



4. Construye en tu calculadora una gráfica idéntica a la que se muestra en la figura. Escribe en las líneas las parejas de números que usaste para construir tu gráfica.

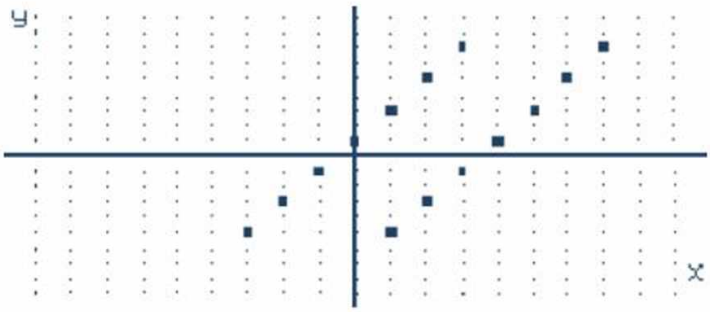


www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 101

Movimientos rígidos y puntos en el plano

La figura muestra dos gráficas; cada una con siete puntos alineados. Esas gráficas "se parecen". La segunda gráfica se construyó trasladando horizontalmente hacia la derecha la primera. Esto se hizo aplicando una operación aritmética a las primeras coordenadas de los puntos (x) de la gráfica de la izquierda.



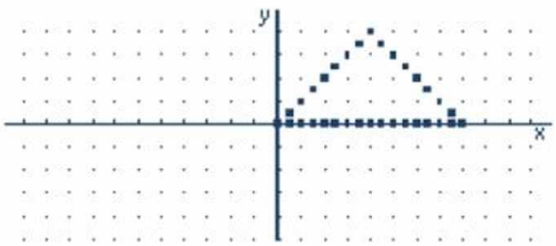
1. Haz una lista con las coordenadas de los puntos de ambas gráficas y encuentra qué operación aritmética se hizo con las coordenadas de los puntos de la primera gráfica para trasladarla hacia la derecha. Reproduce esas gráficas en tu calculadora y explica cómo lo hiciste. _____

_____

2. Reproduce en tu calculadora la gráfica de la siguiente figura. Después traslada esa gráfica 6 unidades a la izquierda.
Explica cómo lo hiciste. _____

_____

_____



3. Utiliza la calculadora para introducir los datos de la siguiente tabla y construye la gráfica de puntos correspondiente.

x	–2	–1.5	–1.3	–1	1	1.4	1.6
y	–7	–5.5	–4.9	–4	2	3.2	3.8

4. Describe cómo es la gráfica que construiste. _____

_____

5. Agrega nuevos datos a la tabla de tu calculadora usando la fórmula $x + 5$, y anótalos en seguida.

x	–2	–1.5	–1.3	–1	1	1.4	1.6
y	–7	–5.5	–4.9	–4	2	3.2	3.8
$x + 5$							

Construye la gráfica en la que los puntos tengan las coordenadas $(x + 5, y)$. ¿Cómo es la gráfica? _____

_____

Compara esta gráfica con la del punto 3. Explica claramente cuál fue el efecto de usar la fórmula $x + 5$, de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderlo. _____

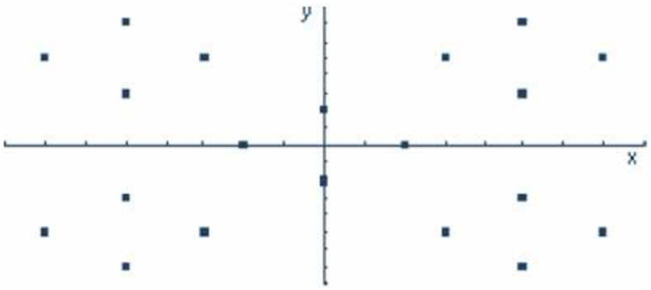
_____

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 102

Traslaciones y simetrías con gráficas

1. Reproduce en tu calculadora la gráfica de la siguiente figura. Sólo construye punto por punto la figura del centro (puntos sobre los ejes) y usa fórmulas para construir las otras cuatro.



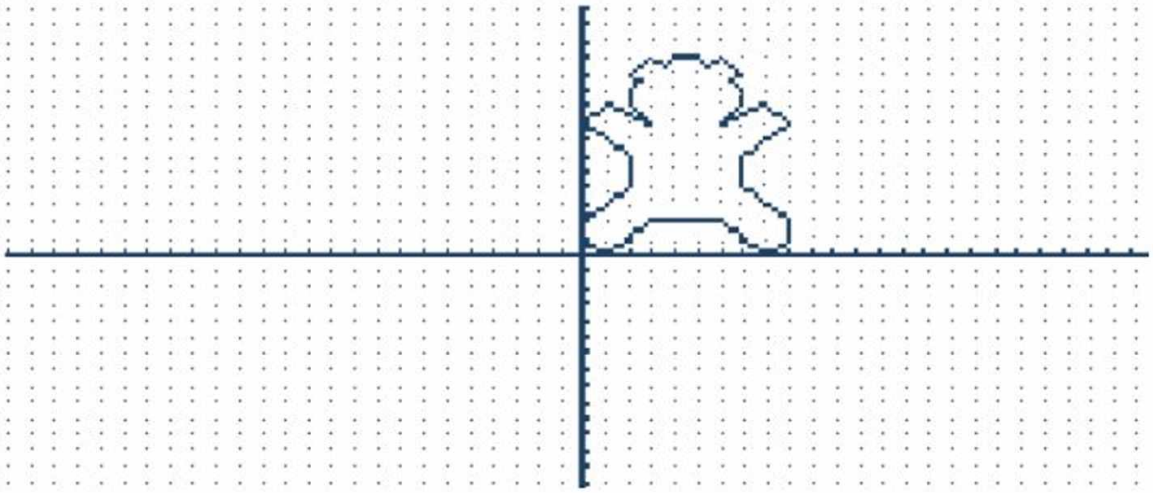
2. Escribe las fórmulas que usaste. _____

_____

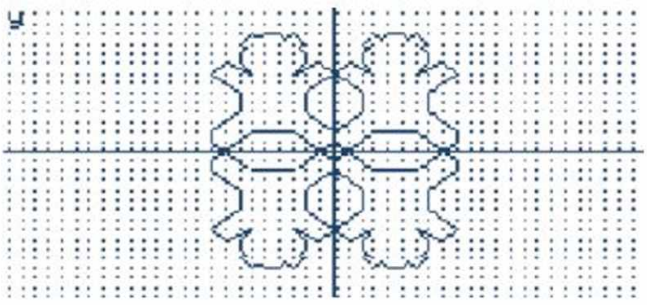
_____

_____

3. Reproduce en tu calculadora la siguiente gráfica. Los parámetros utilizados en los ejes para producir la figura son los siguientes: valor mínimo de $x = -25$; valor máximo de $x = 25$, escala del eje $x = 1$; valor mínimo de $y = -15$; valor máximo de $y = 15$, escala del eje $y = 1$. El tipo de gráfica que se usó une con una línea recta los puntos. Es decir, sólo se pintaron algunos puntos importantes de la figura (39 puntos), y luego la calculadora los unió con líneas en el orden en que se introdujeron.



La siguiente gráfica se hizo aplicando ciertas operaciones aritméticas a las coordenadas de los puntos que producen la figura del "osito".



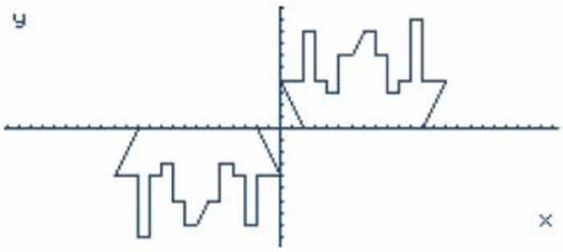
4. Encuentra las operaciones que se hicieron y luego reproduce la gráfica en tu calculadora.

www.FreeLibros.me

Hoja de trabajo 103

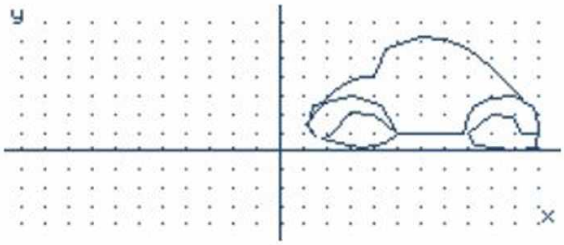
¿Unos estudiantes hicieron esos dibujos?

Meztli, una estudiante de otra escuela, hizo la gráfica que se muestra en la siguiente figura. Primero construyó los puntos en cierto orden y luego los unió con una gráfica de líneas.



1. Reproduce la gráfica y escribe en las líneas siguientes las coordenadas de los puntos que usaste. _____

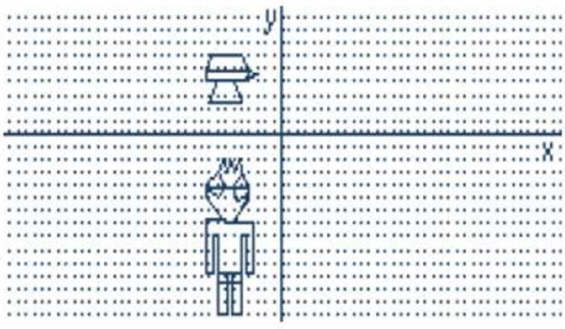
Néstor, hizo la gráfica que se muestra en la siguiente figura siguiendo el mismo procedimiento que Meztli.



2. Haz una copia exacta de su gráfica y anota en las líneas las coordenadas de los puntos que usaste. _____

3. Haz que el carrito avance y describe con todo detalle cómo lo hiciste. _____

Rodrigo hizo, por partes, la gráfica de la siguiente figura. Primero hizo la que está arriba, después el contorno de la figura del "monito" y por último los ojos.

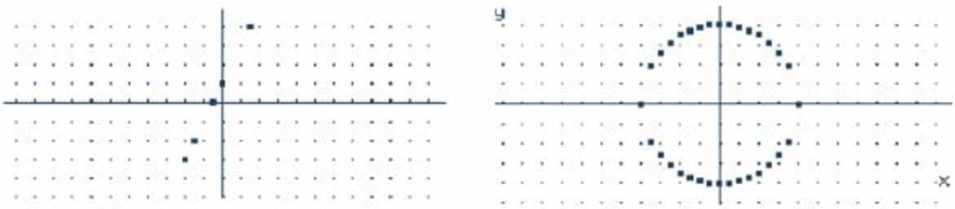


4. Reproduce esa gráfica lo más preciso posible. Anota las coordenadas de los puntos que usaste. _____

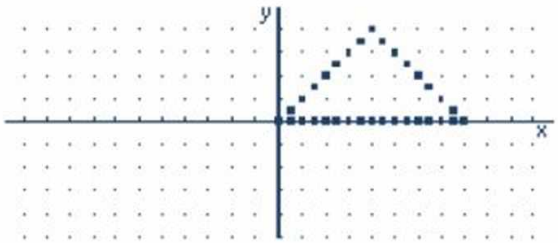
www.FreeLibros.me

Actividades sugeridas para el futuro docente

1. Describe en cuáles actividades el propósito central es la lectura y la ubicación de puntos. Detalla tu respuesta.
2. ¿Qué hiciste para reproducir las siguientes figuras de puntos en tu calculadora? Compara tu procedimiento con el de tus compañeros.



3. Describe qué contenidos matemáticos pueden abordarse al construir en tu calculadora gráficas de puntos como éstas.
4. Analiza en cuáles de las actividades se realizan transformaciones en el plano y de qué tipo son las transformaciones.
5. Analiza la siguiente figura y realiza las actividades que se mencionan a continuación.



   a. Describe cómo le explicarías a un estudiante de educación básica en qué consiste reflejar esta figura respecto al eje *x* si lo hicieras con regla y compás.
   b. Describe el método para mostrarle a un estudiante de educación básica la relación que existe entre la reflexión de esta figura usando regla y compás y las operaciones aritméticas que realizas con las coordenadas de cada punto cuando usas la calculadora.
   c. ¿Cómo le explicarías a un estudiante de educación básica las operaciones aritméticas que puedes aplicar a las coordenadas de los puntos de la figura para reducir la longitud de cada uno de sus lados a la mitad?
   d. ¿Cómo le explicarías a un estudiante de educación básica las operaciones aritméticas que puedes aplicar a las coordenadas de los puntos de la figura para triplicar la longitud de cada uno de sus lados?
   e. Menciona cuáles contenidos de la educación básica se abordan en las actividades de este bloque. Haz una tabla en la que relaciones las hojas de trabajo con los contenidos de la educación básica.
   f. Detalla cuál es la importancia didáctica del uso de la calculadora en el trabajo con este bloque.

www.FreeLibros.me

Este libro tiene como propósito presentar un modelo didáctico para el uso de la calculadora en el salón de clases. Los principios teóricos en que se sustenta son el resultado de años de investigación y aplicación de este modelo.

La base del texto son actividades que conducen a los estudiantes por un recorrido cuyo punto de partida es una exploración intuitiva de las propiedades del sistema numérico decimal y las posibilidades que nos brindan los números para componerlos y descomponerlos con el fin de resolver problemas específicos. También explica la propiedad de densidad de los números racionales en el ámbito del desarrollo de habilidades de estimación y aproximación, y el estudio de la jerarquía de las operaciones aritméticas como una preparación para el estudio del álgebra.

Asimismo, se explotan las ventajas que ofrecen un sistema algebraico computarizado y una calculadora científica para articular un acercamiento intuitivo a las cualidades de los números naturales, los decimales, las fracciones comunes y los números con signo; y culminar con el manejo de las tres formas de representación de una función: algebraica, tabular y gráfica.

Las secciones que complementan este libro ofrecen a los usuarios (profesores, investigadores y estudiantes) el sustento teórico, origen y objetivos de las actividades propuestas:

- Referente teórico
- Modelo didáctico
- Resultados de investigación
- Guía didáctica

Este libro incluye un código de acceso a los recursos en línea y al material complementario disponibles en la siguiente página Web:

www.pearsonenespañol.com/cedillo

ISBN 978-607-32-1414-8

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com

www.FreeLibros.me